Carleson-Masse für gewichtete Räume von analytischen Funktionen

Dissertation

zur

Erlangung der naturwissenschaftlichen Doktorwürde
(Dr. sc. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Universität Zürich

von

Urs Kollbrunner

von

Dättlikon ZH

Promotionskomitee
Prof. Dr. Hans Jarchow (Vorsitz)
Prof. Dr. Viktor Schroeder
Prof. Dr. Louis E. Labuschagne

Zürich, 2006

Zusammenfassung

Wir betrachten Carleson-Masse für gewichtete Bergman-Räume $\mathcal{A}_v^p$ und Hardy-Räume H^p auf dem offenen Einheitsball U_N in $\mathbb{C}^N$. Das sind endliche positive Borel-Masse μ auf U_N (bzw. $\overline{U_N}$ für Hardy-Räume), für welche bei gegebenem $0 < q < \infty$ der Raum $\mathcal{A}_v^p$ (bzw. H^p) stetig in $L^q(\mu)$ einbettet. Erste Resultate über Carleson-Masse für Hardy-Räume gehen auf Carleson ([Car58], [Car62]) zurück. Für Bergman-Räume mit Standardgewichten $v(z) = (1 - \|z\|^2)^\alpha$ $(\alpha > -1)$ und $N = 1$ wurden solche Masse bereits von V.L. Oleinik und B.S. Pavlov [OP74], W.W. Hastings [Has75] und D. Luecking [Lue83], [Lue93] untersucht. Wir verallgemeinern die bekannten Resultate auf Gewichte v, welche eine allgemeinere Bedingung erfüllen und beliebige Dimensionen N und ergänzen diese um Charakterisierungen von Kompaktheit, Ordnungsbeschränktheit und Summierbarkeitseigenschaften der kanonischen Einbettung $\mathcal{A}_v^p \hookrightarrow L^q(\mu)$.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seien (X,Ω) ein messbarer Raum auf einer Menge $X(\neq\emptyset)$ und F ein Vektorraum von Ω-messbaren Funktionen $X\to\mathbb{C}$. Ein positives endliches Mass μ auf Ω heisst (F,q)-Carleson-Mass oder q-Carleson-Mass für F, falls $F\subset L^q(\mu)$ gilt und die formale Identität $I:F\to L^q(\mu)$ stetig ist. In dieser Situation nennen wir I eine Carleson-Einbettung. Beispiele für Carleson-Einbettungen liefern spezielle Klassen von Operatoren. Der Multiplikationsoperator M_h zu einer messbaren Funktion $h:X\to\mathbb{C}$ wird durch die Abbildungsvorschrift $f\mapsto fh$ gegeben. Genau dann definiert M_h einen beschränkten Operator $F\to L^q(\mu)$, wenn $|h|^q d\mu$ ein (F,q)-Carleson-Mass ist. Sei weiter $\varphi:X\to X$ eine messbare Funktion. Genau dann existiert der Kompositionsoperator $C_\varphi:X\to L^q(\mu):f\mapsto f\circ\varphi$ als beschränkter Operator, wenn das Bildmass $\mu\circ\varphi^{-1}$ ein (F,q)-Carleson-Mass ist.

Carleson-Masse kennt man insbesondere aus der Theorie der Räume von analytischen Funktionen, zum Beispiel den klassischen Hardy-Räumen H^p auf dem offenen Einheitsball U_1 in $\mathbb{C}$. In [Car58] hat Carleson das folgende Interpolationsproblem gelöst: Für welche Folgen $(z_n)_n$ im Einheitskreis in $\mathbb{C}$ existiert zu jeder Zahlenfolge $(a_n)_n\in l^\infty$ eine Funktion f aus H^∞ mit $f(z_n)=a_n$ für alle n. Carleson zeigt, dass diese Folgen $(z_n)_n$ genau die gleichmässig separierten Folgen sind. Dabei heisst ein Folge $(z_n)_n$ in U_1 gleichmässig separiert, falls ein $\delta>0$ existiert, so dass $\prod_{j=1,j\neq k}^\infty \frac{|z_k-z_j|}{|1-\overline{z_j}z_k|}\geq\delta$ für alle $k\in\mathbb{N}$ erfüllt ist. Für solche Folgen gilt

$$\Big(\sum_{n=1}^\infty (1-|z_n|)|f(z_n)|\Big)\leq \|f\|_{H^1}\,,$$

d.h. $\mu:=\sum_{n=1}^\infty(1-|z_n|^2)\delta_{z_n}$ ist ein $(H^1,1)$-Carleson-Mass. In [SS61] zeigen Shapiro und Shields, dass in dieser Situation μ auch für $1\leq p<\infty$ ein (H^p,p)-Carleson-Mass ist. Die Erweiterung auf $0<p<1$ wurde danach von Kabaĭla [Kab63] gegeben.

Ein weiteres klassisches Beispiel in diesem Umfeld liefert eine Folgerung einer Ungleichung von Hardy, welche besagt, dass für jede analytische Funktion f aus dem Hardy-Raum H^p, $0<p<\infty$, die Ungleichung

$$\left(\int_{U_1}|f(z)|^{2p}d\sigma(z)\right)^{1/(2p)}\leq\|f\|_{H^p}$$

gilt (vgl. [Vuk03]). Dies bedeutet, dass das normalisierte Lebesgue-Mass σ auf dem Einheitskreis ein $(H^p,2p)$-Carleson-Mass ist.

Von ähnlichem Typ ist auch die Fejér-Riesz-Ungleichung (vgl. [Dur70], Seite 46): für $0<p<\infty$ und $f\in H^p$ gilt

$$\left(\int_{-1}^1|f(x)|^p dx\right)^{1/p}\leq c\,\|f\|_{H^p}\,.$$

Das Lebesque-Mass auf $[-1,1]$ ist also ein (H^p,p)-Carleson-Mass. In [Pow85] wird eine analoge Ungleichung auch für Funktionen von zwei Variablen hergeleitet.

Ein weiteres Beispiel findet man bei Zhu [Zhu05], 5.14. Eine analytische Funktion f hat genau dann beschränkte mittlere Oszillation, wenn $(1-\|z\|^2)\|\nabla f(z)\|^2 d\sigma(z)$ ein $(H^1,1)$-Carleson-Mass ist. Vgl. für den Fall $N=1$ auch Sarason [Sar78] und die dort erwähnten Referenzen.

In der Literatur sind Carleson-Masse zunächst auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ für klassische Hardy-Räume H^p und danach für die entsprechenden Bergman-Räume $\mathcal{A}^p_\alpha$ mit Radialgewichten $v_\alpha : z \mapsto (1-|z|^2)^\alpha$ $(\alpha > -1)$ bezüglich des normalisierten Lebesgue-Masses untersucht worden (vgl. [Car58], [Car62], [Dur70], [Has75]). In der Folge haben vor allem Békollé [Bek82] und Luecking [Lue85a], [Lue85b], [Lue86], [Lue93] für allgemeinere Gewichte $z \mapsto v(z)$ Teile der klassischen Resultate auf die entsprechenden gewichteten Bergman-Räume $\mathcal{A}^p_v$ von analytischen Funktionen auf dem offenen euklidischen Einheitsball U_N in $\mathbb{C}^N$ (für $N \geq 1$) ausdehnen können.

Auch in dieser Arbeit bleiben wir bei Räumen von analytischen Funktionen. Im Zentrum stehen Carleson-Masse für allgemeine gewichtete Bergman- und Hardy-Räume, welche auf dem Einheitsball U_N $(N \in \mathbb{N})$ definiert sind. In erster Linie geht es darum, funktionalanalytische Eigenschaften von Carleson-Einbettungen in Beziehung zu geometrischen Eigenschaften der zugehörigen Carleson-Masse zu setzen.

In Kapitel 1 werden im Wesentlichen einige Aussagen aus der Funktionalanalysis, insbesondere solche über Operatorenideale, rekapituliert, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden.

In der ganzen Arbeit spielen geometrische Überlegungen betreffend spezielle Teilmengen von U_N eine fundamentale Rolle. Die Geometrie wird dabei durch die Bergman-Metrik β auf U_N gegeben. Nur zum Teil findet man die einschlägigen Resultate in Lehrbüchern wie Rudin [Rud80]. Weitere sind zwar bekannt, aber nur mit Mühe in der Literatur auszumachen. Im Kapitel 2 präsentieren wir daher im Detail (mit Beweisen) die in der Folge benötigten Aussagen.

Wir benötigen neben einer befriedigenden Dualitätstheorie für die Bergman-Räume $\mathcal{A}^p_v$ vor allem die Existenz der sogenannten „atomaren Zerlegung“: $\mathcal{A}^p_v$ soll zum entsprechenden Folgenraum l^p isomorph sein. Während für $p<q$ stets $\mathcal{A}^q_v$ in $\mathcal{A}^p_v$ einbettet, gibt es dann auch eine stetige Einbettung $\mathcal{A}^p_v \hookrightarrow \mathcal{A}^q_v$. Sowohl für die Dualitätstheorie als auch die Existenz der atomaren Zerlegung müssen zusätzliche Bedingungen an die Gewichte erfüllt sein. Solche wurden bereits von Bekollé und Luecking angegeben; diese funktionieren indessen nur für den Fall $1<p<\infty$. Wir werden in Kapitel 3 zeigen, dass eine nur wenig stärkere Bedingung an v genügt, um sogar alle Räume $\mathcal{A}^p_v$, $0<p<\infty$, einzubeziehen. Es versteht sich, dass durch solche Bedingungen auch die Standardgewichte $v_\alpha : (z_1,\ldots,z_N) \mapsto (1-\|(z_1,\ldots,z_N)\|^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, erfasst werden.

Die Kapitel 4 bis 6 bilden den Kern dieser Arbeit. Wie schon erwähnt, steht das Zusammenspiel von Eigenschaften eines Carleson-Masses μ auf U_N und von Eigenschaften der formalen Identität $\mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ im Vordergrund: hierbei können p,q beliebig aus $]0,\infty[$ gewählt werden. Sogar für den klassischen Fall (Gewichte $v_\alpha = (1-\|z\|^2)^\alpha$, $\alpha > -1$) sind unsere Ergebnisse erst teilweise bekannt.

Nicht nur im Zusammenhang mit der atomaren Zerlegung spielen bei unserem Thema reproduzierende Kerne eine fundamentale Rolle. Sie erlauben es auch, oftmals den Fall der Hardy-Räume H^p $(= H^p(U_N))$ für analog definierte Carleson-Masse auf $\overline{U_N}$ als Grenzfall $\alpha = -1$ der klassischen Bergman-Räume $\mathcal{A}^p_{v_\alpha}$ zu interpretieren.

Im einzelnen werden wir in Kapitel 4 sehen, dass sich die Fälle $p \leq q$ und $p > q$ bei der Charakterisierung von q-Carleson-Massen für Bergman-Räume $\mathcal{A}^p_v$ für unsere Gewichte v deutlich unterscheiden. In jedem Fall sind jedoch Eigenschaften der Funktion

$$H_{v,p,q,\mu}(z) := \frac{\mu(B_r(z))^{1/q}}{v(z)^{1/p}}$$

massgebend: hierbei ist $B_r(z)$ die offene Kugel vom Radius r und Mittelpunkt z bezüglich der Bergman-Metrik β.

Die Frage nach der Kompaktheit der Carleson-Einbettungen $\mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ beantworten wir in Kapitel 5. Wiederum sind die Fälle $p \leq q$ und $p > q$ zu unterscheiden. Nur im ersten Fall bestätigt sich aber die naheliegende Vermutung, dass eine O-Bedingung für die Stetigkeit einfach durch die entsprechende o-Bedingung zu ersetzen ist. Im Falle $p > q$ ist dagegen mindestens jede Carleson-Einbettung und oft sogar jeder Operator kompakt. Neben einfachen funktionalanalytischen Beweisen präsentieren wir zusätzlich aber ein davon unabhängiges Argument, welches auf funktionentheoretischen Überlegungen beruht.

Im letzten Kapitel verwenden wir die Verbandsstruktur der Räume $L^q(\mu)$, um zunächst die Frage nach der Ordnungsbeschränktheit von Carleson-Einbettungen $\mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ zu beantworten. Wir werden sehen, dass dies eine kanonische Faktorisierung über einen Raum vom Bloch-Typ bedeutet, dessen Parameter einzig durch v und p bestimmt werden. Von besonderer Bedeutung ist dabei, dass in vielen Fällen (insbesondere im Fall klassischer Gewichte) die Carleson-Einbettung $I : \mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ genau dann ordnungsbeschränkt ist, wenn für eine modifizierte Gewichtsfunktion v' die formale Identität $\mathcal{A}^2_{v'} \to L^2(\mu)$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.

Ordnungsbeschränkte Operatoren verbessern gewisse Summierbarkeitseigenschaften von Folgen: es bestehen somit enge Beziehungen zu absolutsummierenden und damit verwandten Operatoren. Entsprechend untersuchen wir, wann Carleson-Einbettungen z.B. (p, q)-summierend, fast-summierend, q-integral, ... sind. Auf diese Weise verallgemeinern wir Resultate, die bis anhin nur für Kompositionsoperatoren im Falle $N = 1$ bekannt waren (vgl. [Dom97]).

Für den Fall $N = 1$ und Standardgewichte v_α wurden Teile der hier präsentierten Resultate bereits in [JK03] veröffentlicht.

Ich bedanke mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Dr. Jarchow für seine Unterstützung, die Diskussionen und die Ratschläge, welche erst diese Arbeit ermöglicht haben.

1. Grundlagen

In diesem Kapitel führen wir zunächst die wichtigsten der für diese Arbeit relevanten Begriffe ein. Zuerst wenden wir uns der Funktionalanalysis zu, wobei wir uns im Wesentlichen an [Rud91] und [KPR84] halten. Danach repetieren wir kurz die benötigten Teile der Theorie über Operatorenideale gemäss [Pie80] und [DJT95].

Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bezeichnen wir wie üblich die Mengen der natürlichen, der reellen und der komplexen Zahlen. Weiter sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.1. Banach-Räume und Operatoren

Für die folgenden Betrachtungen seien X, Y, Z Vektorräume über $\mathbb{C}$.

Wir werden uns vorwiegend mit Räumen von analytischen Funktionen beschäftigen, deren topologische Struktur von einer sogenannten p-Norm erzeugt wird. Diese ist nicht immer eine Norm, weshalb wir eingangs einige einschlägige Grundlagen repetieren. Eine **Quasinorm** auf einem Vektorraum X ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty[$, welche mit einer Konstanten $c \geq 0$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(Q1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(Q2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $x \in X$,
(Q3) $\|x+y\| \leq c\,(\|x\| + \|y\|)$ für alle $x, y \in X$.

Eine **Norm** liegt vor, wenn $c = 1$ möglich ist. Haben wir anstelle von (Q3) für $0 < p \leq 1$ sogar

(S3) $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ für alle $x, y \in X$,

so heisst $\|\cdot\|$ ***p*-Norm**. In diesem Fall gilt (Q3) mit $c = 2^{(1/p)-1}$. Der Satz von Aoki-Rolewicz besagt, dass zu jeder Quasinorm eine äquivalente p-Norm existiert (vgl. [Rol72]). Wir beschränken uns deshalb auf p-Normen $\|\cdot\|$.

Das Paar $[X, \|\cdot\|]$ nennt man einen ***p*-normierten Raum**. Ist dieser unter der induzierten Metrik $d(x,y) := \|x-y\|^p$ vollständig, so heisst er ***p*-Banach-Raum**. Im Fall $p = 1$ spricht man von einem **normierten Raum** bzw. einem **Banach-Raum**. Mit $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ bezeichnen wir den **abgeschlossenen Einheitsball** eines p-normierten Raumes X. Ist aus dem Zusammenhang klar, mit welcher p-Norm X versehen ist, schreiben wir auch $X = [X, \|\cdot\|]$.

Unter einem **Teilraum** eines p-Banach-Raumes soll stets ein abgeschlossener linearer Unterraum verstanden werden.

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes X heisst **absolut *r*-konvex** $(0 < r \leq 1)$, falls

$$\lambda A + \mu A \subset A$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda|^r + |\mu|^r \leq 1$ gilt. Die **absolut r-konvexe Hülle** einer Menge $B \subset X$ ist gegeben durch

$$\operatorname{acx}_r B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i : x_1, \ldots, x_n \in B, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^r \leq 1 \Big\}.$$

Es handelt sich um die kleinste absolut r-konvexe Obermenge von B. Ist X quasi-normiert, so bezeichnen wir mit

$$\overline{\operatorname{acx}}_r B$$

den Abschluss von $\operatorname{acx}_r B$. In jedem p-normierten Raum X ist der Einheitsball B_X absolut p-konvex.

Wichtige Beispiele für (p-)Banach-Räume stammen aus der Mass- und Integrationstheorie.

- Für $0 < p < \infty$ besteht $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, kurz $L^p(\mu)$, aus den μ-fast überall Äquivalenzklassen p-integrierbarer (komplexwertiger) Funktionen auf Ω. Unter der Norm
$$\|f\|_{\mu,p} = \Big(\int_\Omega |f|^p d\mu \Big)^{1/p} \qquad (f \in L^p(\mu))$$
ist $L^p(\mu)$ ein Banach-Raum ($1 \leq p < \infty$) bzw. ein p-Banach-Raum ($0 < p < 1$).

- $L^\infty(\mu)$ bezeichnet den Vektorraum der Äquivalenzklassen messbarer Funktionen f, welche essentiell beschränkt sind, d.h. es gilt
$$\|f\|_{\mu,\infty} := \inf_{A \in \mathcal{A}, \mu(A)=0} \sup_{\omega \in \Omega \setminus A} |f(\omega)| < \infty.$$
Das „essentielle Supremum“ $\|\cdot\|_{\mu,\infty}$ definiert auf $L^\infty(\mu)$ eine Banach-Raum-Norm.

- Ist speziell μ das Zählmass auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ einer Menge Ω, so schreiben wir $l^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ für $0 < p \leq \infty$. Im Falle $0 < p < \infty$ gehört eine Funktion $x : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann zu $l^p(\Omega)$, wenn $S_x = \{\omega \in \Omega : x(\omega) \neq 0\}$ abzählbar und
$$\sum_{\omega \in \Omega} |x(\omega)|^p := \sum_{\omega \in S_x} |x(\omega)|^p$$
endlich ist. Bezeichnen wir für $\omega \in \Omega$ mit e_ω die charakteristische Funktion der Menge $\{\omega\}$, d.h. setzen wir $e_\omega(\omega') = \delta_{\omega\omega'}$ $\forall \omega' \in \Omega$, so gilt (im Sinne der Konvergenz in $l^p(\Omega)$)
$$x = \sum_{\omega \in \Omega} x(\omega) e_\omega := \sum_{\omega \in S_x} x(\omega) e_\omega.$$
$l^\infty(\Omega)$ ist der übliche Banach-Raum der beschränkten Funktionen auf Ω.

  Speziell besteht $l^\infty := l^\infty(\mathbb{N})$ aus allen beschränkten Zahlenfolgen, und für $0 < p < \infty$ ist $l^p := l^p(\mathbb{N})$ der Raum aller Zahlenfolgen $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\zeta_n|^p < \infty.$$

- Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra von Teilmengen einer Menge Ω. Den Raum der komplexen Masse auf $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit
$$\mathcal{M}(\mathcal{A}).$$
Unter der **Variationsnorm** $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ ist das ein Banach-Raum. Dabei bezeichnet $|\mu|$ die **totale Variation** von μ. Weiter setzen wir $L^p(\mu) := L^p(|\mu|)$.

Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge Ω und μ ein positives Mass auf $\mathcal{A}$. Mit $L^0(\mu)$ bezeichnen wir den Raum der messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, wobei wir Funktionen, welche μ-fast überall übereinstimmen, miteinander identifizieren. Für ein endliches Mass μ wird durch
$$d(f,g) := \int_\Omega \frac{|f(\omega) - g(\omega)|}{1 + |f(\omega) - g(\omega)|} d\mu(\omega) \qquad (f, g \in L^0(\mu))$$
eine vollständige Metrik auf $L^0(\mu)$ definiert. Diese Metrik erzeugt die lineare Topologie der Konvergenz im Mass; diese ist jedoch nur in trivialen Fällen durch eine Familie von p-Seminormen gegeben.

Seien X ein p-normierter, Y ein q-normierter Raum und $u : X \to Y$ eine lineare Abbildung,

- u heisst **beschränkt**, falls eine Konstante $c > 0$ mit $\|ux\| \le c\|x\|$ für alle $x \in X$ existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn u stetig ist. Mit
$$\mathcal{L}(X,Y)$$
bezeichnen wir den Vektorraum der beschränkten Operatoren $u : X \to Y$. Durch $\|u\| := \sup_{\|x\| \le 1} \|ux\|$ wird auf $\mathcal{L}(X,Y)$ eine q-Norm definiert. Falls Y vollständig ist, so gilt dies auch für $\mathcal{L}(X,Y)$.

- Ist $u(B_X)$ in Y relativ kompakt, so nennen wir u **kompakt**. Diese Operatoren bilden einen Teilraum
$$\mathcal{K}(X,Y)$$
von $\mathcal{L}(X,Y)$.

Im Allgemeinen gilt $\mathcal{K}(X,Y) \subsetneqq \mathcal{L}(X,Y)$. In wichtigen Fällen hat man jedoch Gleichheit:

Satz 1.1.1 (Satz von Pitt)**.** *Für $0 < q < p < \infty$ gilt*
$$\mathcal{L}(l^p, l^q) = \mathcal{K}(l^p, l^q).$$

Dies stammt für $q \ge 1$ von H.R. Pitt [Pit36]. Das allgemeinere Resultat findet man zum Beispiel bei E. Oja [Oja]. In [Ros69] zeigte H.P. Rosenthal folgende Erweiterung:

Satz 1.1.2. *In folgenden Fällen ist jeder Operator $u : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ kompakt:*

(i) $1 \le q < \infty$, $\max\{2, q\} < p < \infty$, *$\mu$ ein atomares und ν ein beliebiges Mass.*
(ii) $1 \le p < \infty$, $q < \min\{2, p\}$, *μ ein beliebiges und ν ein atomares Mass.*

Sind X und Y quasinormierte Räume, so schreiben wir

$$Y \hookrightarrow X,$$

falls $Y \subset X$ und die Einbettung stetig ist. Die Schreibweise

$$X \simeq Y \text{ bzw. } X \cong Y$$

soll bedeuten, dass X und Y isomorph bzw. isometrisch isomorph sind.

Wir beschränken uns jetzt auf Operatoren zwischen Banach-Räumen.

Ein **(quasi-)Banach-Ideal** $[\mathcal{A},\alpha]$ ist eine Vorschrift, die jedem Paar von Banach-Räumen (X,Y) einen (quasi-)Banach-Raum $[\mathcal{A}(X,Y),\alpha]$ von Operatoren aus $\mathcal{L}(X,Y)$ zuordnet, so dass $\mathcal{A}(X,Y)$ die Operatoren endlichen Ranges enthält, $\alpha(\langle x^*,\cdot\rangle\, y) = \|x^*\|\,\|y\|$ für $x^* \in X^*$ und $y \in Y$ gilt und zusätzlich die „Idealeigenschaft" erfüllt ist: für beliebige Banach-Räume X,Y,Z und $w \in \mathcal{L}(W,X)$, $v \in \mathcal{A}(X,Y)$, $u \in \mathcal{L}(Y,Z)$ gelten $uvw \in \mathcal{A}(W,Z)$ und $\alpha(uvw) \le \|u\|\,\alpha(v)\,\|w\|$.

Seien $[\mathcal{A},\alpha]$ und $[\mathcal{B},\beta]$ zwei Banach-Ideale. Wir schreiben

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B},$$

falls $\mathcal{A}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ für alle Banach-Räume X und Y erfüllt ist. In diesem Fall existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\alpha(u) \le c\beta(u)$ für alle $u \in \mathcal{A}(X,Y)$ und alle Banach-Räume X,Y gilt ([Pie80] 6.1.6, vgl. auch [DJT95] Proposition 6.5). Wir schreiben dann einfach $\alpha \le c \cdot \beta$. Ist sogar $c = 1$ möglich, so verwenden wir die Schreibweise

$$[\mathcal{A},\alpha] \subset [\mathcal{B},\beta].$$

Neben $[\mathcal{L},\|\cdot\|]$ und $[\mathcal{K},\|\cdot\|]$ zählt das Ideal $[\mathcal{W},\|\cdot\|]$ der **schwach kompakten Operatoren** zu den klassischen Beispielen von Banach-Idealen. Schwache Kompaktheit eines Banach-Raum-Operators $u : X \to Y$ bedeutet, dass $u(B_X) \subset Y$ relativ schwach kompakt ist. Ein Satz von Gantmacher besagt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $u^* : Y^* \to X^*$ relativ schwach kompakt ist, und das ist weiter zu $u^{**}(X^{**}) \subset Y$ äquivalent. Wie üblich haben wir dabei Y in kanonischer Weise mit einem Teilraum von Y^{**} identifiziert.

Bildet ein Banach-Raum-Operator $u : X \to Y$ schwach kompakte Mengen auf normkompakte Mengen ab, so heisst er **vollstetig**. Vollstetig sind genau die Operatoren, welche schwache Nullfolgen auf Norm-Nullfolgen abbilden. Sie bilden ein weiteres Banach-Ideal $[\mathcal{V},\|\cdot\|]$. Dieses Ideal enthält alle kompakten Operatoren. Die Inklusion ist echt, wie zum Beispiel die Identität von l^1 zeigt (l^1-Satz von Schur, vgl. [Die84] Seite 85). Ist aber X ein reflexiver Banach-Raum, so ist jeder vollstetige Operator $u : X \to Y$ kompakt.

Zu den wichtigsten Banach-Idealen mit einer von der Operatorennorm verschiedenen Norm gehören Ideale von Operatoren, welche die Summierbarkeitseigenschaften von Folgen verändern oder verbessern.

Sei X ein Banach-Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heisst **starke l^p-Folge** $(0<p<\infty)$, falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty.$$

Sie heisst **schwache l^p-Folge**, falls $(\langle x^*, x_n\rangle)_n \in l^p$ für jedes $x^* \in X^*$ gilt. Dann ist sogar

$$\sup\left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*}\right\} < \infty.$$

Prototypen für schwache l^p-Folgen liefern die Standard-Einheitsvektoren e_n $(n\in\mathbb{N})$ in l^{p^*} $(1<p<\infty)$ bzw. in c_0 $(p=1)$: jede schwache l^p-Folge in einem Banach-Raum X ist das Bild $(ue_n)_n$ von $(e_n)_n$ mit einem geeigneten Operator $u: l^{p^*} \to X$ $(u: c_0 \to X$, falls $p=1)$. Dabei bezeichnet p^* den zu p konjugierten Exponenten $(1/p+1/p^*=1)$. Beschränkte Operatoren führen starke l^p-Folgen in starke l^p-Folgen über und schwache l^p-Folgen in schwache l^p-Folgen. Weiter ist jede starke l^p-Folge natürlich auch eine schwache l^p-Folge.

Bildet ein Operator $u: X \to Y$ dagegen schwache l^p-Folgen aus X ab in starke l^q-Folgen von Y $(0<p,q<\infty)$, so heisst er **(q,p)-summierend**. Im Falle $q<p$ hat einzig der Nulloperator diese Eigenschaft; deshalb wird immer stillschweigend $p\le q$ vorausgesetzt. Genau dann ist $u: X\to Y$ (q,p)-summierend, wenn eine Konstante $c\ge 0$ existiert, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$ und für alle $x_1,\ldots,x_n\in X$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^q\right)^{1/q} \le c\cdot \sup\left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x^*, x_k\rangle|^p\right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*}\right\} \tag{1.1}$$

erfüllt ist. Sei $\pi_{q,p}(u)$ die kleinste derartige Konstante c. Die (q,p)-summierenden Operatoren $u: X\to Y$ bilden ein r-Banach-Ideal

$$[\Pi_{q,p}, \pi_{q,p}],$$

wobei $r=\min\{p,1\}$, für $p\ge 1$ also sogar ein Banach-Ideal. Leicht sieht man, dass $u: X\to Y$ genau dann (q,p)-summierend ist, wenn dies für $u^{**}: X^{**}\to Y^{**}$ richtig ist und dass dann sogar $\pi_{q,p}(u^{**})=\pi_{q,p}(u)$ gilt. Für $1\le p_j\le q_j<\infty$ $(j=1,2)$ mit $p_1\le p_2$, $q_1\le q_2$ und $1/p_1-1/q_1\le 1/p_2-1/q_2$ haben wir

$$[\Pi_{q_1,p_1}, \pi_{q_1,p_1}] \subset [\Pi_{q_2,p_2}, \pi_{q_2,p_2}]. \tag{1.2}$$

Im Falle $p=q$ setzt man

$$[\Pi_p, \pi_p] := [\Pi_{p,p}, \pi_{p,p}]$$

und spricht vom Ideal der ***p*-summierenden Operatoren**. Aus (1.2) erhalten wir

$$[\Pi_{p_1}, \pi_{p_1}] \subset [\Pi_{p_2}, \pi_{p_2}]$$

für $p_1\le p_2$.

Im Allgemeinen haben wir $\Pi_p(X,Y)\subsetneq \mathfrak{L}(X,Y)$; es gibt jedoch wichtige Ausnahmen. Grundlegend für die Theorie der p-summierenden Operatoren sind zum Beispiel die folgenden beiden Resultate von Grothendieck ([Gro56], vgl. auch [DJT95] 1.13). Seien μ und ν beliebige Masse.

Satz 1.1.3. *Jeder stetige Operator* $u : L^1(\mu) \to L^2(\nu)$ *ist* 1*-summierend, und mit einer universellen Konstante* κ_G *gilt* $\|u\| \leq \pi_1(u) \leq \kappa_G \|u\|$.

κ_G ist die sogenannte Grothendieck-Konstante; deren genauer Wert ist nicht bekannt.

Satz 1.1.4. *Seien* $X = L^\infty(\mu)$ *und* Y *ein Teilraum von* $L^q(\nu)$.

(i) *Falls* $1 \leq q < 2$, *so gilt* $\mathcal{L}(X,Y) = \Pi_2(X,Y)$.
(ii) *Für* $2 \leq q < r < \infty$ *haben wir* $\mathcal{L}(X,Y) = \Pi_{q,2}(X,Y) = \Pi_r(X,Y)$.

Wiederum sind die Normen äquivalent.

Jeder Banach-Raum X kann als Teilraum von $l^\infty(K)$ aufgefasst werden, wobei K eine normierende Teilmenge von B_{X^*} ist. Für jede solche Menge ist

$$i_X : X \to l^\infty(K) : x^* \mapsto \langle x^*, \cdot \rangle$$

eine isometrische Einbettung. Ist $K = B_{X^*}$ (oder eine normierende schwach∗-abgeschlossene Teilmenge von B_{X^*}), versehen mit der schwach∗-Topologie, so induziert i_X eine isometrische Einbettung $X \to C(K)$; diese bezeichnen wir ebenfalls mit i_X.

Für das Ideal der p-summierenden Operatoren gilt **der Faktorisierungssatz von Pietsch** ([Pie67], vgl. auch [DJT95] 2.13):

Satz 1.1.5. *Seien* $1 \leq p < \infty$ *und* X, Y *Banach-Räume und* K *eine normierende schwach*-abgeschlossene Teilmenge von* B_{X^*}. *Genau dann ist ein Operator* $u : X \to Y$ p*-summierend, wenn ein reguläres Wahrscheinlichkeitsmass* μ *auf* K *und ein Operator* $\hat{u} : X_p \to Y$ *existieren, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"] & Y \\
i_X(X) \arrow[r, "j_p^X"] & X_p \arrow[u, "\hat{u}"'] \\
C(K) \arrow[r, "j_p"] \arrow[u, phantom, "\bigcap" description] & L^p(\mu) \arrow[u, phantom, "\bigcap" description]
\end{tikzcd} .$$

Dabei ist $X_p = \overline{i_X(X)}^{L^p(\mu)}$, *und* $j_p^X : i_X(X) \to X_p$ *bezeichnet die Einschränkung der kanonischen Einbettung* $j_p : C(K) \hookrightarrow L^p(\mu)$. *Man kann* $\|\hat{u}\| = \pi_p(u)$ *erreichen.*

Eine Faktorisierung durch den ganzen Operator $j_p : C(K) \to L^p(\mu)$ ist allgemein nur im Fall $p = 2$ möglich. Diese stärkere Eigenschaft führt zu einem weiteren Banach-Ideal. Eine lineare Abbildung $u : X \to Y$ zwischen Banach-Räumen heisst ***p*-integral** $(1 \leq p < \infty)$, falls ein Wahrscheinlichkeitsmass μ und beschränkte stetige Operatoren $a : L^p(\mu) \to Y^{**}$ und $b : X \to L^\infty(\mu)$ existieren, so dass das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\
L^\infty(\mu) \arrow[rr, hook] & & L^p(\mu) \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}.$$

Hierbei ist $k_Y : Y \to Y^{**} : y \to \langle \cdot, y \rangle$ die kanonische Einbettung. Die Menge der p-integralen Operatoren $u : X \to Y$ wird mit

$$\mathcal{I}_p(X, Y)$$

bezeichnet. Wir schreiben

$$\iota_p(u) := \inf \|a\| \, \|b\|,$$

wobei das Infimum über alle Masse μ und Operatoren a und b wie oben genommen wird. Wir erhalten ein weiteres Banach-Ideal

$$[\mathcal{I}_p, \iota_p].$$

Jeder p-integrale Operator $u : X \to Y$ ist p-summierend $(1 \le p < \infty)$, aber nicht umgekehrt.

Dass mit Y^{**} und nicht mit Y gearbeitet wird, hat seine Gründe unter anderem in befriedigenderen Dualitätsbeziehungen zwischen p-summierenden und p-integralen Operatoren, die in dieser Arbeit aber kaum eine Rolle spielen werden.

Für ein verwandtes Banach-Ideal benötigen wir die **Rademacher-Funktionen**

$$r_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t) \ (n \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

Wir ergänzen dies durch $r_0(t) := 1 \ \forall t \in [0, 1]$. Die zentrale Aussage ist

Satz 1.1.6 (Khinchin-Ungleichung)**.** *Zu jedem $0 < p < \infty$ existieren positive Konstanten A_p und B_p, so dass für jede skalare Folge $(a_n)_{n=0}^N$ ($N \in \mathbb{N}_0$) gilt:*

$$A_p \left(\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^N a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \le B_p \left(\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \right)^{1/2} .$$

Ein Operator $u : X \to Y$ wird **fast-summierend** genannt, wenn ein $c > 0$ existiert, so dass

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{n=1}^N r_k(t) u x_n \|^2 dt \right)^{1/2} \le c \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^N |\langle x^*, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \tag{1.4}$$

für jede Wahl von endlich vielen Vektoren $x_1, \ldots, x_N$ aus X erfüllt ist. Die Menge der fast-summierenden Operatoren $u : X \to Y$ ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}(X, Y)$, den wir mit

$$\Pi_{as}(X, Y)$$

bezeichnen. Eine vollständige Norm $\pi_{as}(\cdot)$ auf $\Pi_{as}(X, Y)$ erhalten wir, wenn wir $\pi_{as}(u)$ als die kleinste der in (1.4) möglichen Konstanten wählen: Erneut entsteht so ein Banach-Ideal

$$[\Pi_{as}, \pi_{as}].$$

Mit 1.1.6 findet man $\Pi_p \subset \Pi_{as}$ für $0 < p < \infty$; die Inklusion ist echt.

Es ist wieder leicht zu sehen, dass ein Operator $u : X \to Y$ genau dann fast-summierend ist, wenn $u^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ diese Eigenschaft hat, und dass dann $\pi_{as}(u^{**}) = \pi_{as}(u)$ gilt.

Weder für p-summierende, noch für p-integrale, noch für fast-summierende Operatoren gilt eine zum Satz von Schauder analoge Aussage. Immerhin haben wir aber

Satz 1.1.7. *Seien X ein Banach-Raum und H ein Hilbert-Raum. Hat ein Operator $u \in \mathcal{L}(X,H)$ eine fast-summierende Adjungierte u^*, so ist u 1-summierend.*

Diese Aussage geht auf Kwapień zurück, vgl. dazu auch [DJT95] Theorem 2.21 und Seite 255. Die Umkehrung ist falsch, wie jede Surjektion $l^1 \to l^2$ zeigt.

Wir fügen einige Resultate für den Spezialfall der Hilbert-Räume an. Seien H und K Hilbert-Räume. Dann besteht $\mathcal{K}(H,K)$ genau aus den Operatoren $u : H \to K$, welche eine Darstellung der Form

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot , e_n \rangle f_n. \tag{1.5}$$

besitzen. Dabei sind $(e_n)_n$ und $(f_n)_n$ Orthonormalfolgen in H bzw. K und $(\lambda_n)_n \in c_0$. Für $0 < p < \infty$ besteht die **Schatten-Klasse $\boldsymbol{\mathcal{S}_p(H,K)}$** aus allen $u \in \mathcal{L}(H,K)$, für die eine Darstellung (1.5) mit $(\lambda_n)_n \in l^p$ möglich ist.

$$\sigma_p(T) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p \right)^{1/p}$$

ist dann von der Darstellung unabhängig und macht $\mathcal{S}_p(H,K)$ zu einem $\min\{p,1\}$-Banach-Raum. Die Operatoren in $\mathcal{S}_2(H,K)$ sind die **Hilbert-Schmidt-Operatoren**, und $\mathcal{S}_1(H,K)$ ist die sogenannte **Spurklasse**.

Die Schatten-Klassen stehen in enger Beziehung zu den eingeführten Banach-Idealen. Es gelten:

- $[\Pi_{q,p}(H,H), \pi_{q,p}] \simeq [\mathcal{S}_r(H,H), \sigma_r]$ für $1/r = (1/q) - (1/p) + (1/2) > 0$.
- $[\Pi_{q,2}(H,K), \pi_{q,2}] \cong [\mathcal{S}_q(H,K), \sigma_q]$ für $2 \leq q < \infty$.
- $[\Pi_p(H,K), \pi_p] \simeq [\mathcal{S}_2(H,K), \sigma_2]$ für $1 \leq p < \infty$.
- $[\Pi_{as}(H,K), \pi_{as}] \simeq [\mathcal{S}_2(H,K), \sigma_2]$.
- $[\mathcal{I}_1(H,K), \iota_1] \cong [\mathcal{S}_1(H,K), \sigma_1]$.

1.2. Ordnungsbeschränktheit

Ein **(reeller) Banach-Verband** ist ein reeller Banach-Raum M mit einer Ordnungsrelation $\leq$, welche für $x, y, z \in M$ und $\lambda \geq 0$ folgende Bedingungen erfüllt:

(V1) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \lambda, x \leq \lambda y$,
(V2) Es existiert $x \wedge y := \inf\{x, y\}$,
(V3) $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$.

Dabei ist $|x| := \sup\{x, -x\}$.

Ein **komplexer Banach-Verband** L hat die Form $M \times M$, wobei M ein reeller Banach-Verband ist. Die Addition ist koordinatenweise definiert, und die Multiplikation mit komplexen Zahlen ist durch

$$(\alpha + i\beta)(x, y) := (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$$

gegeben. Für $(x,y) \in L$ existiert

$$|(x, y)| := \sup\{(\cos\gamma)x + (\sin\gamma)y : 0 \le \gamma \le 2\pi\}$$

in M, und L wird ein Banach-Raum unter der Norm

$$\|(x, y)\|_L := \| \, |(x, y)| \, \|_M.$$

Ist M ein reeller Raum $L^p(\mu)$ bzw. $C(K)$, so ist L gerade der entsprechende komplexe Banach-Raum. Für diese und weitere Eigenschaften von Banach-Verbänden verweisen wir auf [MN91] und [Sch84].

Ein Operator $u : X \to L$ von einem Banach-Raum X in einen Banach-Verband L heisst **ordnungsbeschränkt**, falls ein $0 \le h \in L$ mit $|ux| \le h$ für jedes $x \in B_X$ existiert. Ordnungsbeschränkte Operatoren haben nur die Linksideal-Eigenschaft: sind $u \in \mathfrak{L}(Y, Z)$, $w \in \mathfrak{L}(W, X)$ und $v : X \to Y$ ordnungsbeschränkt, so ist zwar in jedem Fall vw ordnungsbeschränkt, aber über uv kann in dieser Beziehung keine Aussage gemacht werden. Jedoch stehen sie mit den zuvor eingeführten Banach-Idealen in enger Beziehung. Vgl. dazu [DJT95] 5.18, 5.21.

Satz 1.2.1. *Seien X ein Banach-Raum, μ ein Mass und $1 \le p < \infty$. Jeder ordnungsbeschränkte Operator $u : X \to L^p(\mu)$ ist p-integral und damit auch p-summierend sowie vollstetig. Ist andererseits u^* p-summierend, so ist u ordnungsbeschränkt.*

2. Analytische Funktionen und Geometrie von U_N

Wir repetieren zunächst Grundtatsachen über analytische Funktionen in mehreren Variablen, speziell für solche, die auf dem offenen euklidischen Einheitsball U_N in $\mathbb{C}^N$ definiert sind. Wir folgen dabei im Wesentlichen den Ausführungen in [Rud80]. Anschliessend behandeln wir im Zusammenhang mit der Bergman-Metrik einige für das Weitere grundlegende geometrische Konzepte.

In den folgenden Kapiteln werden Konstanten allgemein mit c bezeichnet. Der Wert von c kann bei jedem Auftreten wechseln, sogar innerhalb von Ungleichungsketten. Wollen wir die Abhängigkeit von Parametern $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ betonen, schreiben wir $c_{\gamma_1,\dots,\gamma_n}$. Dieses Vorgehen ist insbesondere dadurch gerechtfertig, dass wir nur an der Existenz der jeweiligen Konstanten interessiert sind, und nicht an deren Wert.

2.1. Analytische Funktionen auf U_N

Sei N eine natürliche Zahl. $\mathbb{C}^N$ sei der Vektorraum der N-Tupel von komplexen Zahlen. Wir versehen ihn mit dem Skalarprodukt $(w\,|\,z) := \sum_{k=1}^N w_k \overline{z_k}$ und der davon induzierten Norm $\|z\| := \sqrt{(z\,|\,z)}$.

Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^N$. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heisst **holomorph** oder **analytisch**, wenn jeder Punkt $a \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ besitzt, auf welcher f eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} c_\alpha (z-a)^\alpha$$

mit festen komplexen Zahlen c_α hat. Dabei setzen wir $(z-a)^\alpha := \prod_{j=1}^N (z_j - a_j)^{\alpha_j}$. Den Vektorraum der auf G holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit

$$\mathcal{H}(G).$$

Versehen mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf Kompakta ist $\mathcal{H}(G)$ ein Fréchet-Raum, d.h. ein vollständiger, metrisierbarer, lokalkonvexer Vektorraum.

Eine Abbildung $f = (f_1 \dots, f_M) : G \to \mathbb{C}^M$ $(M \in \mathbb{N})$ heisst **analytisch**, falls $f_j : G \to \mathbb{C}$ für jedes $1 \le j \le M$ im obigen Sinne analytisch ist. Für $a = (a_1, \dots a_N)$ und $1 \le j \le N$ ist $G_{j,a} := \{z \in \mathbb{C} : (a_1, \dots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \dots, a_N) \in G\}$ offen. Für eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sei $f_{j,a}$ die für $a \in G$ und $1 \le j \le N$ auf $G_{j,a}$ durch $f_{j,a}(z) := f(a_1, \dots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \dots, a_N)$ definierte Funktion.

Satz 2.1.1 (Satz von Hartogs)**.** *Genau dann ist f auf G analytisch, wenn $f_{j,a}$ für jede Wahl von $a \in G$ und $1 \le j \le N$ auf $G_{j,a}$ analytisch ist.*

Wir verweisen zum Beispiel auf [Nar71] und [Rud80].

Für eine analytische Funktion $f : G \to \mathbb{C}^M$ bezeichnen wir mit

$$f'(z)$$

die Ableitung von f an der Stelle $z \in G$, d.h. die eindeutig bestimmte, $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^M$ mit

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(z+h) - f(z) - Lh\|}{\|h\|} = 0.$$

$f'(z)$ hat bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{C}^N$ bzw. $\mathbb{C}^M$ eine Matrixdarstellung $A(z) = (a_{j,k}(z))_{j,k}$. Es ist

$$a_{j,k}(z) = (D_k f_j)(z) \ (1 \le j \le M, 1 \le k \le N),$$

wobei D_k die Ableitung nach der k-ten Koordinate bezeichnet. Für $M = N$ ist

$$Jf(z) := \det A(z)$$

die (komplexe) Funktionaldeterminante von f an der Stelle z. Fassen wir f als Abbildung $\mathbb{R}^{2N} \supset G \to \mathbb{R}^{2N}$ auf, so ist diese reell differenzierbar, und für die dazugehörige reelle Funktionaldeterminante $J_{\mathbb{R}} f(z)$ gilt

$$J_{\mathbb{R}} f(z) = |Jf(z)|^2.$$

Als Konsequenz können wir Volumina von Bildern unter f mit der komplexen Funktionaldeterminante bestimmen. Aus dem reellen Transformationssatz folgt nämlich sogar

Satz 2.1.2. *Seien $G \subset \mathbb{C}^N$ offen und $\varphi : G \to \mathbb{C}^N$ analytisch und injektiv. Für jede Borel-messbare Menge $B \subset \varphi(G)$ und jede messbare Funktion $f : \varphi(G) \to [0, \infty]$ gilt*

$$\int_B f \, d\lambda^N = \int_{\varphi^{-1}(B)} (f \circ \varphi) \, |J\varphi|^2 d\lambda^N.$$

Weiter ist eine messbare Funktion $f : \varphi(G) \to \mathbb{C}$ genau dann integrierbar, wenn $f \circ \varphi$ integrierbar ist.

Dabei beziehen wir uns auf das $2N$-dimensionale Lebesgue-Mass λ^N auf $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$.

Wie im Reellen gilt der Satz über die Umkehrfunktion.

Satz 2.1.3. *Seien $G \subset \mathbb{C}^N$ offen, $f : G \to \mathbb{C}^N$ analytisch. Sei $z \in G$, und sei $f'(z)$ invertierbar. Dann existieren Umgebungen V von z und W von $f(z)$, so dass f eine bijektive Abbildung $\tilde{f} : V \to W$ induziert. Für die Funktionaldeterminante gilt*

$$|J\tilde{f}^{-1}(f(z))|^{-1} = |Jf(z)| \quad \forall z \in V.$$

Wir sind speziell am offenen Einheitsball

$$U_N := \{z \in \mathbb{C}^N : \|z\| < 1\}$$

in $\mathbb{C}^N$ interessiert. Sei

$$S_N := \{z \in \mathbb{C}^N : \|z\| = 1\}$$

dessen Rand.

U_N ist einfach zusammenhängend. Dies erlaubt uns, aus nullstellenfreien analytischen Funktionen Wurzeln zu ziehen. Es gilt nämlich

Satz 2.1.4. *Ist $G \subset \mathbb{C}^N$ offen und einfach zusammenhängend und $f : G \to \mathbb{C}$ nullstellenfrei, so existiert eine analytische Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit $f = e^g$.*

Vgl. zum Beispiel [Nar71]. Wählen wir für eine nullstellenfreie analytische Funktion $f : U_N \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion $g : U_N \to \mathbb{C}$ wie im vorangehenden Satz, so ist für $0 < r < \infty$ auch $h := e^{rg}$ analytisch und erfüllt

$$|h|^{1/r} = |e^{rg}|^{1/r} = (e^{\mathrm{Re}(rg)})^{1/r} = e^{\mathrm{Re}\, g} = |f|.$$

Wir werden anstelle von h auch f^r schreiben, selbst wenn diese Funktion nicht eindeutig definiert ist. Entsprechend verwenden wir $f^{-r} := (f^r)^{-1} = h^{-1}$.

Ein **Automorphismus** von U_N ist eine analytische Bijektion $\Phi : U_N \to U_N$. Diese Automorphismen bilden unter Komposition eine Gruppe, welche wir mit

$$\mathrm{Aut}(U_N)$$

bezeichnen. Für $a \in \mathbb{C}^N$ sei

$$P_a$$

die Orthogonalprojektion auf den von a erzeugten linearen Unterraum $[a]$ von $\mathbb{C}^N$.

$$Q_a = Id - P_a$$

ist dann die Projektion auf das orthogonale Komplement von $[a]$ in $\mathbb{C}^N$. Es gilt $P_0 = 0$; für $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}^N$ ist

$$P_a z = \frac{(z \mid a)}{(a \mid a)}\, a.$$

Durch

$$\Phi_a(z) := \frac{a - P_a z - (1 - \|a\|^2)^{1/2} Q_a z}{1 - (z \mid a)}$$

wird ein Automorphismus Φ_a von U_N definiert. Dieser vertauscht 0 und a und ist selbstinvers. Für $N = 1$ erhalten wir die üblichen Möbius-Transformationen $z \mapsto \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$. $\Phi_a(z)$ ist auch für $z \in S_N$ definiert und liefert eine Bijektion von S_N auf sich.

Satz 2.1.5. *Sei $\psi \in Aut(U_N)$, und sei $a := \psi^{-1}(0)$. Dann existiert genau ein unitärer Operator U auf $\mathbb{C}^N$, so dass*

$$\psi = U \Phi_a. \tag{2.1}$$

Weiter gilt für alle $z, w \in U_N$

$$1 - (\psi(z) \mid \psi(w)) = \frac{(1 - \|a\|^2)(1 - (z \mid w))}{(1 - (z \mid a))(1 - (a \mid w))}.$$

Hiermit erhalten wir zum Beispiel für alle $a, z \in U_N$ die folgende nützliche Transformationsformel:

$$\frac{1 - \|a\|^2}{|1 - (z \mid a)|^2} = \frac{1 - \|\Phi_a(z)\|^2}{1 - \|z\|^2}. \tag{2.2}$$

2.2. Metriken auf U_N

Würden wir uns allein auf die euklidische Metrik von U_N abstützen, so würden uns deren fehlende Invarianzeigenschaft gegenüber Automorphismen Probleme bereiten. Einen Ausweg bietet die Verwendung nichteuklidscher Metriken. Wir beschränken uns auf die pseudohyperbolische Metrik und die Bergman-Metrik. Für eine vertiefte Behandlung dieser (und anderer) sogenannt invarianter Metriken verweisen wir auf [Kra82].

Der **pseudohyperbolische Abstand** von $z, w \in U_N$ wird durch

$$\rho(w,z) := \|\Phi_z(w)\|$$

definiert. Er liefert auf U_N eine Metrik (vgl. [Gar81] S. 4). Beachte weiter, dass stets $\rho(z,0) = \|z\|$ gilt. Mit

$$\widetilde{B}_r(a) := \{w \in U_N : \rho(a,w) < r\}$$

bezeichnen wir den bezüglich ρ offenen Ball mit Radius $0 < r < 1$ und Mittelpunkt $a \in U_N$. Es ist

$$\widetilde{B}_r(a) = \Phi_a(rU_N).$$

Aus [Rud80] 2.2.7 übernehmen wir, dass $\widetilde{B}_r(a)$ genau aus den Punkten $w \in U_N$ besteht, welche

$$\frac{\|P_a w - c\|^2}{r^2\rho^2} + \frac{\|Q_a w\|^2}{r^2\rho} < 1$$

erfüllen; hier ist $c := \frac{1-r^2}{1-r^2\|a\|^2}\, a$ und $\rho := \frac{1-\|a\|^2}{1-r^2\|a\|^2}$. Somit ist $\widetilde{B}_r(a)$ ein euklidisches Ellipsoid mit Mittelpunkt c. Die Schnittpunkte von $\widetilde{B}_r(a)$ mit $[a]$ bilden einen Kreis mit dem Radius $r\rho$. Schneidet man $\widetilde{B}_r(a)$ mit dem $(2N-2)$-dimensionalen (reellen) Raum, der in c senkrecht auf $[a]$ steht, so erhalten wir dagegen einen Ball mit dem Radius $r\sqrt{\rho}$. Somit erzeugen die pseudohyperbolische Metrik und die euklidische Metrik dieselbe Topologie. Insbesondere gilt $\widetilde{B}_r(0) = rU_N$ für $0 < r < 1$.

Aus dem Lemma von Schwarz (vgl. [Rud80] 8.1.4) folgt:

Satz 2.2.1. *Sei $\varphi : U_N \to U_N$ analytisch. Für alle z, w in U_N gilt*

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) \leq \rho(z,w). \tag{2.3}$$

Insbesondere haben wir für jeden Automorphismus $\varphi \in Aut(U_N)$

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) = \rho(z,w). \tag{2.4}$$

Die pseudohyperbolische Metrik ist also invariant (unter den Automorphismen von U_N). Für $N = 1$ charakterisiert (2.4) genau die Automorphismen von U_1.

Von zentraler Bedeutung sind die folgenden Abschätzungen.

Satz 2.2.2. *Sei $0 < r < 1$.*

(i) *Mit einer Konstanten $c_r > 0$ gilt*

$$\frac{1}{c_r}(1 - \|z\|^2) \leq 1 - \|w\|^2 \leq c_r(1 - \|z\|^2)$$

für alle $z, w \in U_N$ mit $\rho(z,w) < r$.

(ii) *Es existiert ein $c_r > 0$, so dass*

$$\frac{1}{c_r}|1-(z\,|\,w)| \leq 1-\|w\|^2 \leq c_r|1-(z\,|\,w)|$$

für alle $z,w \in U_N$ mit $\rho(z,w) < r$ gilt.

(iii) *Sei $0 < r < R < \infty$. Dann existiert für jede reelle Zahl b eine Konstante $c_{R,b} > 0$, so dass*

$$\left|\frac{(1-(w\,|\,z_1))^b}{(1-(w\,|\,z_2))^b} - 1\right| \leq c_{R,b}\,\rho(z_1,z_2)$$

für alle $w,z_1,z_2 \in U_N$ mit $\rho(z_1,z_2) < r$ gilt.

(iv) *Es existiert ein $c_r > 0$, so dass*

$$\frac{1}{c_r}\frac{1}{|1-(z_1\,|\,w)|} \leq \frac{1}{|1-(z_2\,|\,w)|} \leq c_r\frac{1}{|1-(z_1\,|\,w)|}$$

für alle $w,z_1,z_2 \in U_N$ mit $\rho(z_1,z_2) < r$ gilt.

(v) *Für jedes $\varphi \in Aut(U_N)$ existiert eine Konstante $c_\varphi > 0$, so dass für alle z,w in U_N gilt*

$$\frac{1}{c_\varphi}\,|1-(z\,|\,w)| \leq |1-(\varphi(z)\,|\,\varphi(w))| \leq c_\varphi\,|1-(z\,|\,w)|.$$

Insbesondere haben wir

$$\frac{1}{c_\varphi}(1-\|z\|^2) \leq (1-\|\varphi(z)\|^2) \leq c_\varphi(1-\|z\|^2)$$

für jedes $z \in U_N$ und für jedes $\varphi \in Aut(U_N)$.

Die Potenzen in 2.2.2(iii) werden mit dem Hauptzweig des Logarithmus definiert. Dies ist möglich, weil $1-(z|w)$ für $z,w \in U_1$ seine Werte in $U_N \backslash]-1,0]$ annimmt.

Man findet Beweise dieser Aussagen zum Teil in [Lue85a], [Zhu05] und für $N = 1$ auch in [Dom97]. Der Vollständigkeit halber führen wir die Details aus.

Beweis. (i): Für $z \in U_N$ und $w \in \widetilde{B}_r(z)$ ist $\tilde{w} := \Phi_z(w) \in \widetilde{B}_r(0) = rU_N$. Somit gilt

$$1-r^2 \leq 1-\|\tilde{w}\|^2 \leq 1. \tag{2.5}$$

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefert

$$|1-(\tilde{w}\,|\,z)| \leq 1+\|\tilde{w}\|\|z\| \leq 2 \tag{2.6}$$

und

$$|1-(\tilde{w}\,|\,z)| \geq 1-\|\tilde{w}\|\|z\| \geq 1-\|\tilde{w}\| \geq 1-r. \tag{2.7}$$

Mit 2.1.5 erhalten wir

$$1-\|w\|^2 = 1-\|\Phi_z(\tilde{w})\|^2 = \frac{(1-(z\,|\,z))(1-(\tilde{w}\,|\,\tilde{w}))}{(1-(\tilde{w}\,|\,z))(1-(z\,|\,\tilde{w}))} = \frac{(1-\|z\|^2)(1-\|\tilde{w}\|^2)}{|1-(\tilde{w}\,|\,z)|^2}.$$

Mit (2.5) und (2.7) ergibt sich

$$1-\|w\|^2 \leq \frac{1-\|z\|^2}{(1-r)^2}.$$

Analog schliesst man aus (2.5) und (2.6) auf

$$1 - \|w\|^2 \geq \frac{(1 - \|z\|^2)(1 - r^2)}{2},$$

womit (i) bewiesen ist.

(ii): Sei c_r die Konstante aus (i). Mit (2.2) folgt

$$\frac{1 - \|w\|^2}{|1 - (z \,|\, w)|^2} = \frac{1 - \|\Phi_w(z)\|^2}{1 - \|z\|^2} \geq \frac{1}{c_r} \frac{1 - \|\Phi_w(z)\|^2}{1 - \|w\|^2}.$$

Somit gilt

$$\frac{1 - \|w\|^2}{|1 - (z \,|\, w)|} \geq \sqrt{\frac{1}{c_r}(1 - \|\Phi_w(z)\|^2)},$$

wobei die rechte Seite wegen der Voraussetzung von Null wegbeschränkt ist. Die andere Abschätzung in (ii) ergibt sich analog.

(iii): Setze $w' := \Phi_{z_1}(w)$ und $z_2' := \Phi_{z_1}(z_2)$. Nach Voraussetzung ist $\|z_2'\| = \rho(0, z_2') = \rho(z_1, z_2) < r$. Mit 2.1.5 folgen

$$1 - (w \,|\, z_1) = 1 - (\Phi_{z_1}(w') \,|\, \Phi_{z_1}(0)) = \frac{1 - \|z_1\|^2}{1 - (w' \,|\, z_1)}$$

und

$$1 - (w \,|\, z_2) = 1 - (\Phi_{z_1}(w') \,|\, \Phi_{z_1}(z_2')) = \frac{(1 - \|z_1\|^2)(1 - (w' \,|\, z_2'))}{(1 - (w' \,|\, z_1))(1 - (z_1 \,|\, z_2'))}.$$

Also gilt für $b \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{(1 - (w \,|\, z_1))^b}{(1 - (w \,|\, z_2))^b} - 1 \right| = \left| \frac{(1 - (z_1 \,|\, z_2'))^b}{(1 - (w' \,|\, z_2'))^b} - 1 \right| = \left| \frac{(1 - (z_1 \,|\, z_2'))^b - (1 - (w' \,|\, z_2'))^b}{(1 - (w' \,|\, z_2'))^b} \right|.$$

Wegen $|(z_1 \,|\, z_2')| < r$ und $|(w' \,|\, z_2')| < r$ findet man mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} &|(1-(z_1|z_2'))^b-(1-(w'|z_2'))^b| \\ &\qquad \leq \sup_{0\leq t\leq 1} b|1-t(z_1|z_2')-(1-t)(w'|z_2')|^{b-1}|(z_1|z_2')-(w'|z_2')| \\ &\qquad \leq c_{r,b}|(z_1|z_2')-(w'|z_2')| \leq c_{r,b}\|z_2'\| = c_{r,b}\rho(z_1,z_2). \end{aligned}$$

Weiter haben wir für den Ausdruck im Nenner

$$2 > |1 - (w' \,|\, z_2')| \geq 1 - \|w'\| \, \|z_2'\| \geq 1 - r.$$

Aus den zwei vorangehenden Ungleichung folgt direkt die Behauptung.

(iv): Die Invarianz von ρ liefert

$$\rho(\Phi_w(z_1), \Phi_w(z_2)) = \rho(z_1, z_2).$$

Somit folgt aus (2.2) und (i)

$$\frac{1 - \|w\|^2}{|1 - (z_1 \,|\, w)|^2} = \frac{1 - \|\Phi_w(z_1)\|^2}{1 - \|z_1\|^2} \leq c_r \frac{1 - \|\Phi_w(z_2)\|^2}{1 - \|z_2\|^2} = c_r \frac{1 - \|w\|^2}{|1 - (z_2 \,|\, w)|^2}.$$

Durch Vertauschen der Rollen von z_1 und z_2 erhalten wir die untere Abschätzung.

(v): Nach Satz 2.1.5 gilt für $z,w\in U_N$

$$|1-(\varphi(z)\,|\,\varphi(w))| = \frac{(1-\|a\|^2)|1-(z\,|\,w)|}{|1-(z\,|\,a)|\,|1-(a\,|\,w)|},$$

mit $a=\varphi^{-1}(0)$. Die Behauptung ergibt sich mit $c_\varphi=\frac{1+\|a\|}{1-\|a\|}$ aus der für alle $z\in U_N$ gültigen Beziehung

$$1-\|a\| \le |1-(z\,|\,a)| \le 1+\|a\|.$$

■

Mit der pseudohyperbolischen Metrik definieren wir

$$\beta(z,w) := \frac{\sqrt{N+1}}{2}\log\frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)}.$$

Es ist also

$$\rho(z,w) = \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{N+1}}\,\beta(z,w)\right).$$

Lemma 2.2.3. *$\beta(\cdot,\cdot)$ ist eine Metrik. Sie ist invariant, d.h. sie erfüllt*

$$\beta(z,w) = \beta(\varphi(z),\varphi(w))\ \forall z,w\in U_N,\ \forall\varphi\in Aut(U_N).$$

Beweis. Die zweite Aussage ist selbstverständlich, und bei der ersten ergibt sich einzig die Dreiecksungleichung nicht sofort aus der Definition. Wegen der Invarianz genügt es zu zeigen, dass für alle $z,w\in U_N$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{N+1}}{2}\log\frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)} &= \beta(z,w)\\ &\le \beta(z,0)+\beta(0,w) = \frac{\sqrt{N+1}}{2}\left(\log\frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}+\log\frac{1+\|w\|}{1-\|w\|}\right)\end{aligned}$$

gilt, bzw.

$$\frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)} \le \frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}\cdot\frac{1+\|w\|}{1-\|w\|}.$$

Elementare Umformungen reduzieren dies zu

$$\rho(z,w) \le \frac{\|z\|+\|w\|}{1+\|z\|\|w\|}.$$

Dies ist aber wegen 2.1.5 richtig:

$$\begin{aligned}1-\|\Phi_z(w)\|^2 &= \frac{(1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)}{|1-(z|w)|^2}\\ &\ge \frac{(1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)}{(1+\|z\|\|w\|)^2}\\ &= 1-\frac{(\|z\|+\|w\|)^2}{(1+\|z\|\|w\|)^2}.\end{aligned}$$

■

β ist die sogenannte **Bergman-Metrik**. Ihre offenen Bälle, also die Mengen

$$B_r(z) := \{w \in U_N : \beta(z,w) < r\},$$

erfüllen $B_r(z) = \widetilde{B}_s(z)$ mit $s := (e^r - 1)/(e^r + 1)$. Insbesondere bleiben alle bisherigen Aussagen dieses Kapitels auch für die Bergman-Metrik richtig: $\rho(\cdot\,,\cdot)$ und $\beta(\cdot\,,\cdot)$ erzeugen dieselben uniformen Strukturen. Wir bevorzugen die Bergman-Metrik, da deren Unbeschränktheit einige technische Vorteile bietet.

Das **normalisierte Lebesgue-Mass** σ_N auf U_N wird durch

$$d\sigma_N = \frac{N!}{\pi^N} d\lambda^N$$

gegeben, wobei λ^N weiterhin das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$ bezeichnet ([Rud80] 1.4.9). Weiter sei

$$m_N$$

das **normalisierte Flächenmass** auf der Sphäre S_N. Eine wichtige Rolle wird ferner das Mass

$$d\Lambda_N = \frac{d\sigma_N}{(1 - \|z\|^2)^{N+1}}$$

spielen. Es ist unter den Automorphismen von U_N invariant, d.h. es gilt

$$\Lambda_N(B) = \Lambda_N(\varphi(B))$$

für jede Borel-Menge B in U_N und jeden Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(U_N)$ (vgl. [Rud80] 2.2.6). Insbesondere haben wir wegen der Invarianz der Bergman-Metrik

$$\Lambda_N(B_r(z)) = \Lambda_N(B_r(0)),$$

für jedes $z \in U_N$ und jedes $0 < r < \infty$.

Wir machen von jetzt an von folgender Notation Gebrauch: Sind $f(z)$ und $g(z)$ zwei reelle Funktionen auf einer Menge Z, so schreiben wir

$$f(z) \simeq g(z),$$

falls eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{c}\, g(z) \le f(z) \le c g(z)$$

für alle $z \in Z$ gilt. Ist dabei c von Parametern $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ abhängig, so schreiben wir auch

$$f(z) \overset{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}{\simeq} g(z).$$

Existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$f(z) \le c g(z)$$

für alle $z \in Z$ gilt, verwenden wir entsprechend die Bezeichnungen

$$f(z) \lesssim g(z)$$

bzw.

$$f(z) \overset{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}{\lesssim} g(z).$$

In diesem Sinne gelten

Satz 2.2.4. *Für $z \in U_N$, $d \in \mathbb{R}$ und $t > -1$ definieren wir*

$$I_d(z) := \int_{S_N} \frac{dm_N(\zeta)}{|1 - (z \mid \zeta)|^{N+d}}$$

und

$$J_{d,t}(z) := \int_{U_N} \frac{(1 - \|w\|^2)^t}{|1 - (z \mid w)|^{N+1+t+d}} d\sigma_N(w).$$

- *Im Fall $d < 0$ sind I_d und $J_{d,t}$ beschränkt.*
- *Falls $d > 0$, so gilt*

$$I_d(z) \overset{d}{\simeq} (1 - \|z\|^2)^{-d} \overset{d,t}{\simeq} J_{d,t}(z).$$

- *Weiter haben wir*

$$I_0(z) \simeq \log \frac{1}{1 - \|z\|^2} \overset{t}{\simeq} J_{0,t}(z).$$

Für den Beweis verweisen wir auf [Rud80] 1.4.10., für den Fall $N = 1$ siehe auch [HKZ00] und [Zhu90].

2.3. Separierte Folgen

Sei $\delta > 0$. Eine Folge $(z_n)_n$ in U_N wird **$\boldsymbol{\delta}$-separiert** genannt, falls $\beta(z_i, z_j) \geq \delta$ für jedes $i \neq j$ gilt. Wir sagen, dass die Folge $(z_n)_n$ **separiert** ist, falls sie δ-separiert ist für ein $\delta > 0$.

Die folgenden Lemmata garantieren die Existenz spezieller separierter Folgen. Wir verallgemeinern hier Argumente aus [Lue93], wo der Fall $N = 1$ behandelt wird.

Lemma 2.3.1. *Seien $0 < \delta \leq r < \infty$ gegeben. Dann existiert eine positive Konstante $L := L(\delta, r)$, so dass für jede δ-separierte Folge $(z_n)_n$ jedes $z \in U_N$ in höchstens L der Bälle $B_r(z_n)$ liegt.*

Gilt für ein $R > 0$ zusätzlich $0 < \delta < r < R$, so kann L als Funktion von R und r/δ gewählt werden.

Beweis. Seien $(z_n)_n$ eine δ-separierte Folge und $z \in U_N$. Wegen der Invarianz von $\beta(\cdot, \cdot)$ genügt es, den Fall $z = 0$ zu betrachten. Wir müssen zeigen, dass $B_r(0)$ nur endlich viele der z_n enthält und dass deren Anzahl durch eine nur von r und δ abhängige Zahl nach oben beschränkt ist. Seien nun L Punkte aus der Folge $(z_n)_n$ ausgewählt, die in $B_r(0)$ liegen. Da $(z_n)_n$ δ-separiert ist, sind die Bälle $B_{\delta/2}(z_n)$ paarweise disjunkt. Sie haben alle das Mass $\Lambda_N(B_{\delta/2}(0))$. Für $z_n \in B_r(0)$ und $z \in B_{\delta/2}(z_n)$ gilt

$$\beta(0, z) \leq \beta(0, z_n) + \beta(z_n, z) \leq r + \delta/2$$

und daher $B_{\delta/2}(z_n) \subset B_{r+\delta/2}(0)$. Somit haben wir

$$L\, \Lambda_N(B_{\delta/2}(0)) \leq \Lambda_N(B_{r+\delta/2}(0)).$$

Damit erhalten wir wie gewünscht

$$L \leq \frac{\Lambda_N(B_{r+\delta/2}(0))}{\Lambda_N(B_{\delta/2}(0))}.$$

Elementare Rechnungen zeigen, dass zu gegebenem $R > r$ eine Konstante $c_R > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{c_R} \leq \frac{\Lambda_N(B_r(0))}{r^{2N}} \leq c_R$$

für alle $0 < r < R$ gilt. Also ist

$$\frac{\Lambda_N(B_{r+\delta/2}(0))}{\Lambda_N(B_{\delta/2}(0))} \leq c_R^2 \frac{(r+\delta/2)^{2N}}{(\delta/2)^{2N}} = c_R^2(2\frac{r}{\delta}+1)^{2N},$$

woraus direkt die Zusatzbehauptung folgt. ■

Lemma 2.3.2. *Sei $\delta > 0$. Dann existiert eine δ-separierte Folge $(z_n)_n$ in U_N, so dass $\inf_n \|z_n\| > 0$ und $\bigcup_n B_\delta(z_n) = U_N$.*

Beweis. Wähle $z_1, z_2 \in U_N$ mit $\beta(z_1, 0) = \delta/2$ und $\beta(z_1, z_2) = \delta$. Für $n \geq 2$ seien $z_1, \ldots, z_n \in U_N$ bereits bestimmt. Wähle $z_{n+1} \in U_N \setminus \bigcup_{k=1}^n B_\delta(z_k)$ so, dass $\beta(z_1, z_{n+1})$ minimal ist. Insbesondere gilt $\beta(z_{n+1}, 0) \geq \delta/2$.

Rekursiv erhalten wir so eine δ-separierte Folge $(z_n)_n$ in U_N mit $\inf_n \|z_n\| > 0$. Falls ein $z \in U_N \setminus \bigcup_{n=1}^\infty B_\delta(z_n)$ existiert, so gilt $\beta(z_1, z_n) \leq \beta(z_1, z)$ nach Wahl der z_n. Wenn wir $r = \beta(z_1, z)$ setzen, so ist z_1 also in den unendlich vielen Bällen $B_r(z_n)$ enthalten, was 2.3.1 widerspricht. ■

Wählt man für $\delta = r > 0$ eine Folge $(z_n)_n$ gemäss 2.3.2, so gelten wegen 2.3.1 mit einem $\kappa = \kappa(r)$:

(i) $U_N = \bigcup_{n=1}^\infty B_r(z_n)$,
(ii) $B_{r/2}(z_n) \cap B_{r/2}(z_m) = \emptyset$ falls $n \neq m$,
(iii) Jeder Punkt aus U_N gehört zu höchstens κ Bällen $B_{2r}(z_n)$.

Eine Folge $(z_n)_n$, welche diesen Bedingungen genügt, heisst **r-Netz**. Die kleinste Zahl κ, welche (iii) erfüllt, ist die **Überdeckungskonstante** des r-Netzes $(z_n)_n$.

Aus der Bedingung (ii) folgt inbesondere $\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 1$.

Wegen des Zusatzes in 2.3.1 kann bei gegebenem $R > 0$ in (iii) dieselbe Konstante κ für alle $0 < r < R$ gewählt werden.

2.4. Spezielle Mengen

Neben den Bergman-Bällen werden eine ganze Reihe von weiteren speziellen Teilmengen von U_N wichtig werden. Am Ende des Abschnittes skizzieren wir diese im Fall $N = 1$. Für $z \in U_N$ definieren wir zunächst „die z gegenüberliegende Halbkugel“

$$H_z := \{w \in U_N : \mathrm{Re}(w \mid z) \leq 0\}.$$

Damit bilden wir das **Carleson-Gebiet**

$$S(z) := \Phi_z(H_z).$$

Offensichtlich existieren Radien $r_1, r_2 > 0$ und zu jedem $z \in U_N$ ein $\widetilde{w}_z \in U_N$, so dass $B_{r_1}(\widetilde{w}_z) \subset H_z \cap B_{r_2}(0)$. Wendet man darauf Φ_z an, so erhält man mit $w_z = \Phi_z(\widetilde{w}_z)$:

Lemma 2.4.1. *Es existieren $r_1, r_2 > 0$, so dass es für jedes $z \in U_N$ ein $w_z \in U_N$ mit $B_{r_1}(w_z) \subset S(z) \cap B_{r_2}(z)$ gibt.*

Für die Mengen $S(z)$ erhalten wir ähnliche Abschätzungen wie für die Bergman-Bälle.

Satz 2.4.2. (i) *Für jedes $z \in U_N$ und jedes $w \in S(z)$ ist $\|z\| \leq \|w\|$.*

(ii) *Es existiert ein $c > 0$, so dass für alle $z \in U_N$ und $w \in S(z)$*
$$\frac{1}{c} \leq \frac{1 - \|z\|^2}{|1 - (w \,|\, z)|} \leq c$$
erfüllt ist.

(iii) *Es existiert ein $c > 0$, so dass für jedes $z \in U_N$ und alle $v, w \in S(z)$ gilt:*
$$\frac{1}{c} \frac{1}{|1 - (w \,|\, z)|} \leq \frac{1}{|1 - (v \,|\, z)|} \leq c \frac{1}{|1 - (w \,|\, z)|}.$$

(iv) *Für jede Wahl von $z, w \in U_N$ und jedes $v \in S(z)$ haben wir*
$$\frac{1}{|1 - (w \,|\, z)|} \leq \frac{2}{|1 - (w \,|\, v)|}.$$

Beweis. Für $v \in H_z$ ist zunächst
$$2 \geq |1 - (v \,|\, z)| \geq \mathrm{Re}(1 - (v \,|\, z)) = 1 - \mathrm{Re}(v \,|\, z) \geq 1. \tag{2.8}$$
Wie im Beweis von 2.2.2(i) erhalten wir damit für jedes $w \in S(z)$
$$1 - \|w\|^2 = \frac{(1 - \|z\|^2)(1 - \|\Phi_z(w)\|^2)}{|1 - (\Phi_z(w) \,|\, z)|^2} \leq 1 - \|z\|^2,$$
also (i).

(ii): Für $w \in S(z)$ erhalten wir wegen $\Phi_z = \Phi_z^{-1}$ und $\Phi_z(0) = z$ ebenfalls mit 2.1.5
$$\frac{1 - \|z\|^2}{|1 - (w \,|\, z)|} = (1 - \|z\|^2) \cdot \left| \frac{(1 - (\Phi_z(w) \,|\, z))(1 - (z \,|\, 0))}{(1 - (z \,|\, z))(1 - (\Phi_z(w) \,|\, 0))} \right| = |1 - (\Phi_z(w) \,|\, z)|.$$
Wegen (2.8) sind wir fertig.

Die Ausage (iii) folgt sofort aus (ii).

Auch (iv) ergibt sich mit 2.1.5. Zunächst gilt
$$\frac{1}{2} \leq \frac{|1 - (z \,|\, w)|}{|1 - (w \,|\, v)|}$$

nach (2.8). Wegen $\Phi_z(v) \in H_z$ ist daher

$$\begin{aligned}\frac{1}{|1-(w\,|\,z)|} &= \frac{1}{|1-(\Phi_z\Phi_z(w)\,|\,\Phi_z(0))|} = \frac{|1-(\Phi_z(w)\,|\,z)|}{1-\|z\|^2} \\ &\leq 2\cdot\frac{|1-(\Phi_z(w)\,|\,z)|}{1-\|z\|^2}\cdot\frac{|1-(z\,|\,\Phi_z(v))|}{|1-(w\,|\,\Phi_z(v))|} \\ &= \frac{2}{|1-(\Phi_z\Phi_z(w)\,|\,\Phi_z\Phi_z(v))|} = \frac{2}{|1-(w\,|\,v)|}\ .\end{aligned}$$

■

Für $z,\, w \in \overline{U_N}$ setzen wir als nächstes

$$d(z,w) := |1-(z\,|\,w)|^{1/2}.$$

Es ist bekannt, dass d die Dreiecksungleichung erfüllt und auf S_N sogar eine Metrik definiert (vgl. [Rud80] 5.1.2).

Mit Hilfe von d führen wir weitere Teilmengen von U_N bzw. $\overline{U_N}$ ein, welche in der Literatur mitunter anstelle der Carleson-Gebiete verwendet werden. Gebiete der Form

$$S(z,h) := \{w \in U_N : d(z,w)^2 < h\} \quad (z \in \overline{U_N}, 0 < h < \infty)$$

erfüllen nach [Lue85a] für $z \in U_N$, $h = 1-\|z\|$, $\zeta = z/\|z\|$ die Beziehung

$$S(\zeta,h) \subset S(z) \subset S(\zeta,2h). \tag{2.9}$$

Die Verwendung der $S(z)$ gestattet durch die Transformation auf Halbkugeln H_z eine Reihe von beweistechnischen Vereinfachungen. Wir haben bereits in den Beweisen von 2.4.1 und 2.4.2 davon Gebrauch gemacht.

Für die späteren Charakterisierungen von Carleson-Einbettungen für Hardy-Räume führen wir für $z \in \overline{U_N}$ und $0 < h < \infty$ weiter die Mengen

$$Q(z,h) := \{\zeta \in S_N : d(\zeta,z)^2 < h\}$$

und

$$\widetilde{S}(z,h) := \{w \in \overline{U_N} : d(w,z)^2 < h\} = S(w,h) \cup Q(w,h)$$

ein.

Wir stellen bereits hier einige technische Aussagen über Mengen dieses Typs zusammen:

Lemma 2.4.3. (i) *Für $w \in U_N$ und $z \notin S(w, 4(1-\|w\|^2))$ mit $\|z\| \geq \|w\|$ gilt*

$$Q(w,(1-\|w\|^2)) \cap Q(z,(1-\|z\|^2)) = \emptyset.$$

(ii) *Für jedes $w \in U_N$ gilt*

$$S(w,4(1-\|w\|^2)) \subset S\Big(\frac{w}{\|w\|}, (1+2\sqrt{2})^2(1-\|w\|)\Big).$$

Beweis. (i): Wir nehmen an, es gebe ein $\widetilde{w} \in Q(w,(1-\|w\|^2)) \cap Q(z,(1-\|z\|^2))$. Für dieses gilt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$d(z,w) \leq (1-\|z\|^2)^{1/2} + (1-\|w\|^2)^{1/2} \leq 2(1-\|w\|^2)^{1/2},$$

d.h. $z \in S(w, 4(1-\|w\|^2))$: Widerspruch.

(ii): Für $\widetilde{w} \in S(w, 4(1-\|w\|^2))$ gilt

$$\begin{aligned} d(\widetilde{w}, \frac{w}{\|w\|}) &\leq d(\widetilde{w}, w) + d(w, \frac{w}{\|w\|}) \\ &\leq 2(1-\|w\|^2)^{1/2} + |1-(w\,|\,\frac{w}{\|w\|})|^{1/2} \\ &= 2(1+\|w\|)^{1/2}(1-\|w\|)^{1/2} + (1-\|w\|)^{1/2} \\ &\leq (2\sqrt{2}+1)(1-\|w\|)^{1/2}. \end{aligned}$$

$\widetilde{w}$ ist also wie behauptet ein Element von $S(\frac{w}{\|w\|}, (1+2\sqrt{2})^2(1-\|w\|))$. ■

Elementare Rechnungen (vgl. [Rud80] 5.1.4) zeigen ferner, dass

$$m_N(Q(\zeta, h)) \simeq h^N \tag{2.10}$$

gilt.

Im Zusammenhang mit Carleson-Massen werden weitere Teilmengen von U_N eine Rolle spielen.

- Das **Carleson-Rechteck** zu $\zeta \in S_N$ und $0 < h < 1$ ist

$$W(\zeta, h) := \left\{ z \in U_N : 1 - \|z\| < h, \frac{z}{\|z\|} \in Q(\zeta, h) \right\}.$$

- Das **Approximationsgebiet** für $\zeta \in S_N$ und $\gamma > 1$ ist durch

$$D_\gamma(\zeta) := \left\{ z \in U_N : |1 - (z\,|\,\zeta)| < \frac{\gamma}{2}(1 - \|z\|^2) \right\} \tag{2.11}$$

  definiert.

  Es ist einfach zu sehen, dass

$$\{\zeta \in S_N : w \in D_\gamma(\zeta)\} = Q\Big(w, \frac{\gamma}{2}(1 - \|w\|^2)\Big) \tag{2.12}$$

  für jedes $w \in \overline{U_N}$ gilt.

- Im Falle $N=1$ benötigen wir ausserdem die **Stolz-Gebiete $\boldsymbol{\Gamma(\theta)}$** $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Diese sind als die konvexe Hülle von $\{e^{i\theta}\} \cup \{z : |z| < \sqrt{1/2}\}$ definiert. Sie können für $N=1$ die Approximationsgebiete $D_\alpha(\zeta)$ ersetzen.

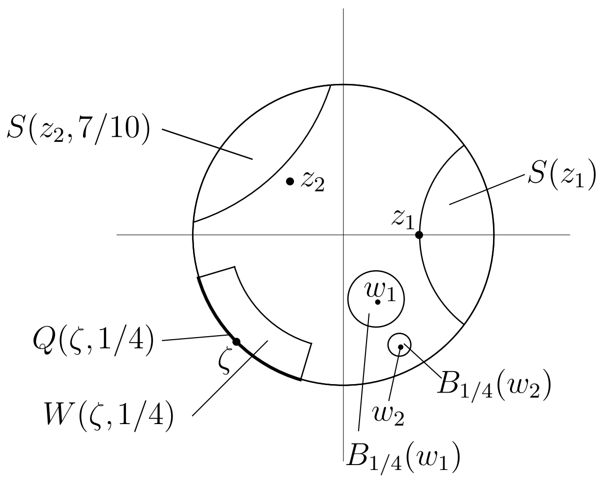

Abbildung 1.a

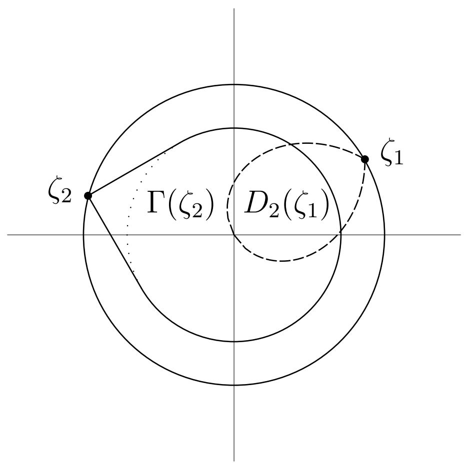

Abbildung 1.b

3. Räume von analytischen Funktionen

Wir diskutieren in diesem Kapitel vorwiegend gewichtete Bergman-Räume $\mathcal{A}^p_v$ auf U_N, wobei wir wesentlich allgemeinere Gewichte als die bekannten Standardgewichte zulassen. Im Vordergrund stehen Dualitätsprobleme und das Problem der Existenz atomarer Zerlegungen für diese Räume unter möglichst schwachen Zusatzbedingungen an die Gewichte v. Im Fall $p>1$ ist ein Teil der in der Folge abgeleiteten Resultate bereits bekannt; siehe insbesondere [Lue85a]. Für den klassischen Fall der Standardgewichte verweisen wir auf [Axl88], [Zhu90], [HKZ00], [DS04] und [Zhu05].

3.1. Gewichtete Bergman-Räume

Unter einem Mass μ auf U_N verstehen wir von jetzt an ein positives, endliches Mass auf den Borel-Mengen von U_N, sofern nichts anderes erwähnt wird. Weiter bezeichnen wir Borel-messbare Funktionen kurz als messbar. Um gewissen technischen Komplikationen aus dem Weg zu gehen, wollen wir in diesem Kapitel zusätzlich annehmen, dass $\mu(O)>0$ für jede nichtleere offene Menge $O\subset U_N$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass zwei stetige Funktionen $f\neq g$ auf U_N in verschiedenen μ-Äquivalenzklassen liegen. Mit

$$\mathcal{A}^p_\mu := \left\{ f \in \mathcal{H}(U_N) : \|f\|_{\mu,p} := \left(\int_{U_N} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

bezeichnen wir den **Bergman-Raum** zum Mass μ und zum Exponenten $0<p<\infty$. Für $1\le p<\infty$ ist das ein normierter Raum; für $0<p<1$ definiert $\|f\|_{\mu,p}$ nur eine p-Norm. Im Fall $p=2$ erhalten wir einen Prä-Hilbert-Raum, dessen Skalarprodukt durch

$$(f \mid g)_\mu := \int_{U_N} f\overline{g}\,d\mu$$

gegeben wird.

Wir zeigen als erstes, dass die Polynome in den Räumen $\mathcal{A}^p_\mu$ dicht liegen. Für eine Funktion $f\in\mathcal{H}(U_N)$ und $0<r<1$ schreiben wir dazu wie üblich

$$f_r(z) := f(rz) \qquad (z \in U_N).$$

Satz 3.1.1. *Sei μ ein Mass auf U_N.*

(i) *Für jedes $f\in\mathcal{H}(U_N)$ gilt* $\lim_{r\to 1^-}\|f_r-f\|_{\mu,p}=0$.

(ii) *Die Polynome liegen dicht in $\mathcal{A}^p_\mu$.*

Beweis. (i) Seien $f\in\mathcal{A}^p_\mu$ und $0<r<1$. Als beschränkte analytische Funktion gehört auch f_r zu $\mathcal{A}^p_\mu$. Also existiert zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, so dass

$$\int_{U_N\setminus\delta\overline{U_N}} (|f_r(z)|+|f(z)|)^p d\mu(z) \le \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Auf $\delta\overline{U_N}$ ist $|f_r - f|^p$ beschränkt, also in $L^1(\mu)$. Weil weiter für jedes $z \in \delta\overline{U_N}$

$$\lim_{r\to 1^-} |f_r(z) - f(z)|^p = 0$$

gilt, folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\delta\overline{U_N}} |f_r(z) - f(z)|^p d\mu(z) = 0.$$

Also existiert ein $0 < r_0 < 1$, so dass

$$\int_{\delta\overline{U_N}} |f_r(z) - f(z)|^p d\mu(z) \le \frac{\varepsilon^p}{2}$$

für jedes $r_0 < r < 1$ gilt. Insgesamt erhalten wir für $r_0 < r < 1$

$$\begin{aligned}\int_{U_N} |f_r - f|^p d\mu &\le \int_{\delta\overline{U_N}} |f_r(z) - f(z)|^p d\mu(z) + \int_{U_N \setminus \delta\overline{U_N}} (|f_r(z)| + |f(z)|)^p d\mu(z) \\ &\le \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,\end{aligned}$$

also

$$\|f_r - f\|_{\mu,p} \le \varepsilon.$$

(ii) Sei $f \in \mathcal{A}^p_\mu$. Nach (i) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $0 < r < 1$, so dass

$$\|f - f_r\|_{\mu,p} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da f_r sogar auf $\overline{U_N}$ definiert ist, folgt aus dem Approximationssatz von Weierstrass die Existenz eines Polynoms P mit

$$\sup_{z\in U_N} |f_r(z) - P(z)| \le \frac{\varepsilon}{2(1 + \mu(U_N))^{1/p}},$$

also mit

$$\|f_r - P\|_{\mu,p} = \left(\int_{U_N} |f_r - P|^p d\mu\right)^{1/p} \le \frac{\varepsilon}{2(1 + \mu(U_N))^{1/p}} \mu(U_N)^{1/p} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\|f - P\|_{\mu,p} \le \varepsilon,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ■

Insbesondere sind die Bergman-Räume $\mathcal{A}^p_\mu$ für $0 < p < \infty$ also separabel.

3.2. Spezielle Gewichtsfunktionen

Speziell interessieren uns Masse der Form

$$d\sigma_v := v d\Lambda_N,$$

wobei $v : U_N \to]0, \infty[$ eine messbare Funktion ist. Dabei bezeichnet

$$d\Lambda_N := \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^{N+1}} d\sigma_N(z)$$

weiterhin das invariante Mass. Wir schreiben

$$\mathcal{A}^p_v := \mathcal{A}^p_{\sigma_v}$$

und entsprechend

$$(f \mid g)_v := (f \mid g)_{\sigma_v}$$

für $f, g \in \mathcal{A}^2_v$. Gilt zusätzlich

$$\int_{U_N} v d\Lambda_N = 1,$$

so heisst v **Gewichtsfunktion**. Unsere Wahl der Dichten bezüglich des invarianten Masses Λ_N statt, wie in der Literatur üblich, bezüglich σ_N führt zu eleganteren Formulierungen verschiedener Aussagen.

Die wichtigsten Beispiele für Gewichtsfunktionen sind die **Standardgewichte**

$$v_\alpha(z) := c_\alpha(1 - \|z\|^2)^{\alpha+N+1}.$$

Dabei ist $\alpha > -1$, und $c_\alpha > 0$ ist so gewählt, dass $\sigma_{v_\alpha}(U_N) = 1$. Für die entsprechenden Masse schreiben wir kurz

$$\sigma_\alpha := \sigma_{v_\alpha}.$$

Diese Standardgewichte führen zu den **klassischen Bergman-Räumen**

$$\mathcal{A}^p_\alpha := \mathcal{A}^p_{v_\alpha}.$$

Allgemeiner setzen wir für eine positive, messbare Funktion v

$$d\sigma_{\alpha,v} := v d\sigma_\alpha$$

und bezeichnen die dazugehörigen Bergman-Räume mit

$$\mathcal{A}^p_{\alpha,v} := \mathcal{A}^p_{\sigma_{\alpha,v}}.$$

In dieser Allgemeinheit sind allerdings nur wenige tiefergehende Aussagen zu erwarten. Deshalb werden wir nach und nach strengere Bedingungen an die Gewichte stellen und uns mit den daraus ergebenden Konsequenzen befassen.

Für eine Gewichtsfunktion v und $1 < p < \infty$ definieren wir zunächst die **adjungierte Gewichtsfunktion** als

$$v_p := v^{-p^*/p} = v/v^{p^*}.$$

Weiter setzen wir für $s > N$

$$v_{p,s}(z) := v(z)^{-p^*/p}(1 - \|z\|^2)^{p^* s}, z \in U_N.$$

Offenbar gilt

$$(v_{p,s})_{p^*,s} = v.$$

Für $p = 1$ ergänzen wir die vorangehende Definition durch

$$v_{1,s}(z) := v(z)^{-1}(1 - \|z\|^2)^s.$$

Die Bergman-Metrik spielt bei den im Folgenden eingeführten Bedingungen eine zentrale Rolle.

Seien $1 < p < \infty$ und $0 < r < \infty$. Wie in [Lue85a] sagen wir, die Gewichtsfunktion v erfülle die **Bedingung $C_p(r)$**, falls ein $c_{r,p} > 0$ existiert, so dass

$$\sigma_v(B_r(z))^{1/p}\sigma_{v_p}(B_r(z))^{1/p^*} \le c_{r,p} \qquad (\boldsymbol{C_p(r)})$$

für alle $z \in U_N$ gilt. Solche Gewichtsfunktionen nennen wir auch

$C_p(r)$-Gewichte.

Analoge Sprechweisen werden wir auch bei Gewichten verwenden, welche später eingeführt werden.

Mit der Hölder-Ungleichung sieht man, dass für $C_p(r)$-Gewichte sogar

$$1 \le \sigma_v(B_r(z))^{1/p}\sigma_{v_p}(B_r(z))^{1/p^*} \le c_{r,p} \quad \forall z \in U_N$$

erreicht werden kann. Weiter gilt wegen 2.2.2 für ein beliebiges $t > N$ und jedes $z \in U_N$

$$\frac{1}{c_{r,p}}(1-\|z\|^2)^t \le \sigma_v(B_r(z))^{1/p}\sigma_{v_{p,t}}(B_r(z))^{1/p^*} \le c_{r,p}(1-\|z\|^2)^t. \tag{3.1}$$

Aus 2.2.2(i) folgt, dass die Standardgewichte v_α die Bedingung $C_p(r)$ für alle $0 < r < \infty$ und jedes $1 < p < \infty$ erfüllen.

Die Bedingung $C_p(r)$ scheint von der Wahl von $r > 0$ abzuhängen. Dass dies aber nicht so ist, zeigt folgendes Resultat aus [Lue85a]:

Lemma 3.2.1. (i) *Genügt v der Bedingung $C_q(r)$ für $0 < r < \infty$ und $1 < q < \infty$, so existiert für jede Wahl von $0 < r_1 < r_2 < \infty$ ein $c_{r_1,r_2} > 0$, so dass*

$$\sigma_v(B_{r_2}(a)) \le c_{r_1,r_2}\sigma_v(B_{r_1}(a))$$

für jedes $a \in U_N$ gilt.

(ii) *$C_q(r)$ ist von r unabhängig, d.h. erfüllt v die Bedingung $C_q(r)$ für ein $0 < r < \infty$, so auch für jedes andere.*

Wir werden deshalb gelegentlich auch von **C_q-Gewichten** sprechen.

Eine oberhalbstetige Funktion $f : U_N \to [-\infty, \infty[$ heisst **subharmonisch**, wenn

$$f(z) \le \int_{S_N} f(z + r\zeta)\,dm_N(\zeta)$$

für alle $z \in U_N$ und alle $r > 0$ mit $z + r\overline{U_N} \subset U_N$ gilt. Für eine analytische Funktion $f : U_N \to \mathbb{C}$ sind zum Beispiel $\log|f|$ und $|f|^c$ für jedes $c > 0$ subharmonisch ([Rud80] 1.5.4). Insbesondere erhalten wir:

Lemma 3.2.2. *Für jedes $r > 0$ existiert ein $c_r > 0$, so dass*

$$|f(a)|^p \le c_r \int_{B_r(a)} |f(z)|^p\,d\Lambda_N(z)$$

für jede analytische Funktion $f : U_N \to \mathbb{C}$, jedes $0 < p < \infty$ und jedes $a \in U_N$ erfüllt ist.

Beweis. Nach den vorangehenden Bemerkungen gilt für jedes $0<t<1$

$$|f(0)|^p \le \int_{tS_N} |f(\zeta)|^p dm_N(\zeta).$$

Durch Integration nach dem Radius t erhalten wir für $0<r<1$ mit $s:=(e^r-1)/(e^r+1)$

$$|f(0)|^p \le s^{-2N} \int_{sU_N} |f(z)|^p d\sigma_N(z) = s^{-2N} \int_{B_r(0)} |f(z)|^p d\sigma_N(z).$$

Dies transformieren wir auf den Ball $B_r(a)$, wobei wir 2.1.5 und 2.2.2 verwenden:

$$\begin{aligned} |f(a)|^p = |f(\Phi_a(0))|^p &\le s^{-2N} \int_{B_r(0)} |f(\Phi_a(z))|^p d\sigma_N(z) \\ &= s^{-2N} \int_{B_r(a)} |f(z)|^p (1-\|\Phi_a(z)\|^2)^{N+1} d\Lambda_N(z) \\ &\le s^{-2N} \int_{B_r(a)} |f(z)|^p d\Lambda_N(z). \end{aligned}$$

■

Eine ähnliche Ungleichung gilt sogar für Masse mit Gewichten, welche $C_q(r)$ erfüllen.

Satz 3.2.3. *Sei v ein $C_q(r)$-Gewicht $(0<r<\infty$ und $1<q<\infty)$. Dann existiert ein $c_{r,q}>0$, so dass*

$$|f(a)|^p \le \frac{c_{r,q}}{\sigma_v(B_r(a))} \int_{B_r(a)} |f(z)|^p d\sigma_v(z)$$

für jedes $a\in U_N$, jedes $0<p<\infty$ und jede analytische Funktion $f:U_N\to\mathbb{C}$ gilt.

Beweis. Dies ergibt sich aus 3.2.2 und der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |f(a)|^{p/q} &\le c_r \int_{B_r(a)} |f(w)|^{p/q} d\Lambda_N(w) \\ &\le c_r \left(\int_{B_r(a)} |f(w)|^p v(w) d\Lambda_N(w)\right)^{1/q} \left(\int_{B_r(a)} v(w)^{-q^*/q} d\Lambda_N(w)\right)^{1/q^*} \\ &\le c_{r,q}\sigma_v(B_r(a))^{-1/q} \left(\int_{B_r(a)} |f(w)|^p d\sigma_v(w)\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass v der Bedingung $C_q(r)$ genügt. ■

Für die Standardgewichte v_α gilt also für jedes $a\in U_N$

$$|f(a)|^p \le \frac{c_{r,\alpha}}{(1-\|z\|^2)^{\alpha+N+1}} \int_{B_r(a)} |f(z)|^p dv_\alpha(z). \tag{3.2}$$

Aus 3.2.3 folgt insbesondere, dass die **Auswertungsfunktionale**

$$\delta_a : \mathcal{A}^p_v \to \mathbb{C} : f \mapsto f(a) \quad (a \in U_N)$$

stetig sind mit

$$\|\delta_a\| \overset{p,v}{\lesssim} 1/\sigma_v(B_r(a))^{1/p}. \tag{3.3}$$

Wir benötigen eine Modifikation von 3.2.3:

Satz 3.2.4. *Seien $0<p<\infty$ und v ein $C_q(r)$-Gewicht für $0<r<\infty$ und $1<q<\infty$. Dann existiert ein $c_{r,q}>0$, so dass*

$$|f(w_1)|^p \leq \frac{c_{r,q}}{\sigma_v(B_r(w_2))} \int_{B_r(w_2)} |f(z)|^p d\sigma_v(z)$$

für alle $w_1,w_2 \in U_N$ mit $\beta(w_1,w_2) \leq r/2$ und jede analytische Funktion $f: U_N \to \mathbb{C}$ erfüllt ist.

Beweis. Für $w_1,w_2 \in U_N$ mit $\beta(w_1,w_2) \leq r/2$ gilt $B_{r/2}(w_1) \subset B_r(w_2) \subset B_{2r}(w_1)$. Somit finden wir wegen 3.2.1 eine von w_1 und w_2 unabhängige Konstante $c_r>0$, so dass $\sigma_v(B_{r/2}(w_1)) \geq c_r\sigma_v(B_{2r}(w_1)) \geq c_r\sigma_v(B_r(w_2))$. Mit 3.2.3 schliessen wir

$$\begin{aligned}|f(w_1)|^p &\leq \frac{c_{r,q}}{\sigma_v(B_{r/2}(w_1))} \int_{B_{r/2}(w_1)} |f(z)|^p d\sigma_v(z) \\ &\leq \frac{c_{r,q}}{\sigma_v(B_r(w_2))} \int_{B_r(w_2)} |f(z)|^p d\sigma_v(z).\end{aligned}$$

■

Aus 3.2.3 folgt weiter

Korollar 3.2.5. *Seien v ein $C_q(r)$-Gewicht $(0<r<\infty,\ 1<q<\infty)$ und $0<p<\infty$. Dann existiert zu jeder kompakten Menge $K \subset U_N$ eine Konstante $c_{K,r,q}>0$, so dass*

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq c_{K,r,q} \|f\|_{v,p}$$

für jedes $f \in \mathcal{A}_v^p$ gilt.

$\mathcal{A}_v^p$ bettet also stetig in $\mathcal{H}(U_N)$ ein. Damit können wir jetzt zeigen, dass die Bergman-Räume mit C_q-Gewichten für $1 \leq p \leq \infty$ Banach-Räume und für $0<p<1$ p-Banach-Räume sind.

Korollar 3.2.6. *Falls v ein $C_q(r)$-Geqwicht ist $(0<r<\infty,\ 1<q<\infty)$, so ist $\mathcal{A}_v^p$ in $L^p(\sigma_v)$ abgeschlossen und somit ein $\min\{p,1\}$-Banach-Raum $(0<p<\infty)$.*

Beweis. Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{A}_v^p$ mit Grenzwert $f \in L^p(\sigma_v)$. Wegen 3.2.5 konvergiert $(f_n)_n$ sogar gleichmässig auf Kompakta gegen f. Also ist f analytisch und gehört somit zu $\mathcal{A}_v^p$. ■

Im Hilbert-Raum-Fall $p=2$ existiert wegen (3.3) zu jedem $a \in U_N$ eine Funktion $K_v(a,\cdot) \in \mathcal{A}_v^2$ mit

$$\delta_a(f) = (f \mid K_v(a,\cdot))_v$$

für alle $f \in \mathcal{A}_v^2$. $K_v(\cdot,\cdot)$ ist der **reproduzierende Kern** von $\mathcal{A}_v^2$. Man verifiziert leicht, dass für die Standardgewichte v_α

$$K_{v_\alpha}(a,w) = \frac{1}{(1-(w\mid a))^{\alpha+N+1}} \qquad \forall a,w \in U_N$$

gilt ([Rud80] 7.1.1). Ein nicht ganzzahliger Exponent $\alpha+N+1$ in diesem Ausdruck macht wie schon zuvor keine Probleme.

3.3. Dualität

Die Darstellung der Dualräume der Bergman-Räume $\mathcal{A}_v^p$ gelingt, wenn weitere Einschränkungen an die Gewichte v gemacht werden. Nachfolgende Resultate gehen für $1<p<\infty$ auf [Lue85a] und zum Teil bereits auf [Bek82] zurück.

Sei $s>N$. Wir sagen, v erfülle die **Bedingung $\widetilde{B}_p(s)$**, falls ein $c>0$ existiert, so dass für alle $z\in U_N$ gilt

$$\sigma_v(S(z))^{1/p}\sigma_{v_{p,s}}(S(z))^{1/p^*}\leq c(1-\|z\|^2)^s. \qquad (\widetilde{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{s}))$$

Mit $S(z)$ bezeichnen wir weiterhin die in 2.4 eingeführten Carleson-Gebiete.

Eine verwandte Bedingung findet sich bei [Lue85a]. v erfüllt $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\alpha})$ für $\alpha>-1$, falls ein $c>0$ existiert, so dass für jedes $z\in U_N$

$$\sigma_{\alpha,v}(S(z))^{1/p}\sigma_{\alpha,v_p}(S(z))^{1/p^*}\leq c\,\sigma_\alpha(S(z)) \qquad (\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\alpha}))$$

erfüllt ist.

v erfüllt $\widetilde{B}_p(s)$ genau dann, wenn $v(\cdot)(1-\|\cdot\|^2)^{-s}$ der Bedingung $B_p(s-N-1)$ genügt. Die Bedingung $B_p(0)$ wurde ursprünglich in [Bek82] eingeführt. Jedes Gewicht, welches $\widetilde{B}_p(s)$ erfüllt, genügt auch der Bedingung $C_p(r)$ für ein (und dann jedes) $0<r<\infty$ ([Lue85a]). Wir werden später sehen, dass die Umkehrung nicht immer richtig ist.

Für $s>N$ definieren wir

$$K_s(z,w):=\left(\frac{1-\|w\|^2}{1-(z\,|\,w)}\right)^s.$$

Wir haben bereits festgestellt, dass durch

$$(P_sf)(z):=\int_{U_N}f(w)K_s(z,w)d\Lambda_N(w)$$

die Orthogonalprojektion P_s von $L^2(v_{s-N-1})$ auf $\mathcal{A}^2_{s-N-1}$ gegeben wird. Wir wollen daraus zunächst auch für $1<p<\infty$ Projektionen von $L^p(\sigma_v)$ auf $\mathcal{A}_v^p$ gewinnen. Das folgende Resultat aus [Bek82] zeigt die Signifikanz der Bedingung $\widetilde{B}_p(s)$.

Lemma 3.3.1. *Seien $s>N$ und $1<p<\infty$. Genau dann definiert P_s eine stetige Projektion in $L^p(\sigma_v)$, wenn v die Bedingung $\widetilde{B}_p(s)$ erfüllt. Das Bild der Projektion ist dann $\mathcal{A}_v^p$.*

$\mathcal{A}_v^p$ ist mit anderen Worten ein komplementierter Teilraum von $L^p(\sigma_v)$. Für die Standardgewichte erhalten wir speziell

Korollar 3.3.2. *Sei $1<p<\infty$. Genau dann definiert $P_{\beta+N+1}$ eine stetige Projektion von $L^p(\sigma_\alpha)$ auf $\mathcal{A}_\alpha^p$, wenn $(\beta+1)<p(\alpha+1)$.*

Vergleiche dazu auch [Rud80] Kapitel 7, [FR74] und für den Fall $N=1$ [HKZ00] Theorem 1.10.

Auf 3.3.1 beruht schliesslich der folgende Satz (vgl. [Lue85a]):

Satz 3.3.3. *Seien $1<p<\infty$, $s>N$ und v eine Gewichtsfunktion mit $\widetilde{B}_p(s)$. Dann gilt*

$$(\mathcal{A}_v^p)^* \simeq \mathcal{A}_{v_{p,s}}^{p^*}.$$

Die Identifikation wird durch den (konjugiert linearen) Isomorphismus

$$\Phi : \mathcal{A}_{v_{p,s}}^{p^*} \to (\mathcal{A}_v^p)^* : g \mapsto \left[\Phi_g : f \mapsto \int_{U_N} f(z)\overline{g(z)}(1-\|z\|^2)^s d\Lambda_N(z)\right]$$

gegeben.

Um den Fall $p=1$ einschliessen zu können, schränken wir die zulässigen Gewichte nochmals ein. Sei weiterhin $s>N$. Wir sagen, eine Gewichtsfunktion v erfülle die **Bedingung $\boldsymbol{D(s)}$**, wenn ein $c>0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{c}\frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s} \leq \int_{U_N} \frac{v(w)}{|1-(z\,|\,w)|^s} d\Lambda_N(w) \leq c\frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s} \qquad (\boldsymbol{D(s)})$$

für alle $z\in U_N$ gilt. Für $N=1$ geht diese Bedingung auf [Dom97] zurück. Wegen 2.2.2(ii) und (v) erfüllt v genau dann $D(s)$ wenn $v\circ\varphi$ dieser Bedingung für ein und dann alle $\varphi\in\mathrm{Aut}(U_N)$ genügt. Wir werden unten sehen, dass $\widetilde{B}_p(s)$ aus $D(s)$ für jedes $1<p<\infty$ folgt.

Erfüllt v die Bedingung $D(s)$ für ein $s>N$, so sagen wir, v genüge der **Bedingung $\boldsymbol{D}$**.

Ist v ein $D(s)$-Gewicht für $s>N$ und gilt zusätzlich

$$\lim_{\|z\|\to 1} \frac{(1-\|z\|^2)^s}{v(z)} = 0, \qquad (\boldsymbol{D^0(s)})$$

so erfüllt v die **Bedingung $\boldsymbol{D^0(s)}$**. Die **Bedingung $\boldsymbol{D^0}$** ist dadurch definiert, dass v der Bedingung $D^0(s)$ für ein $s>N$ genügt.

Aus 2.2.4 folgt, dass die Standardgewichte v_α für alle $s>\alpha+N+1$ die Bedingung $D^0(s)$ erfüllen.

D-Gewichte übernehmen von den Standardgewichten eine Reihe von Eigenschaften:

Satz 3.3.4. *Sei v eine Gewichtsfunktion, welche $D(s)$ für ein $s>N$ erfüllt.*

(i) *Zu jedem $0<r<\infty$ existiert eine Konstante $c_r>0$, so dass für alle $z_1,z_2\in U_N$ mit $\beta(z_1,z_2)<r$ gilt:*

$$\frac{1}{c_r}v(z_1) \leq v(z_2) \leq c_r v(z_1).$$

(ii) *Zu jedem $0<r<\infty$ existiert ein $c_r>0$, so dass für jedes $z\in U_N$ gilt:*

$$\frac{1}{c_r}\sigma_v(B_r(z)) \leq v(z) \leq c_r\sigma_v(B_r(z)).$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Definition und 2.2.2:

$$v(z_1) \le c(1-\|z_1\|^2)^s \int_{U_N} \frac{v(w)}{|1-(z_1|w)|^s} d\Lambda_N(w)$$
$$\le c_r(1-\|z_2\|^2)^s \int_{U_N} \frac{v(w)}{|1-(z_2|w)|^s} d\Lambda_N(w) \le c_r v(z_2).$$

Die andere Abschätzung erhalten wir durch Vertauschen der Rollen von z_1 und z_2.

Die zweite Behauptung ergibt sich mit der Invarianzeigenschaft von Λ_N durch Integration der ersten Ungleichung über $B_r(z)$. ■

Korollar 3.3.5. *Erfüllt eine Gewichtsfunktion v die Bedingung D, so ist $1/v$ lokalbeschränkt, d.h. beschränkt auf jeder kompakten Teilmenge von U_N .*

Beweis. Seien $K \subset U_N$ kompakt und $0 < r < \infty$ beliebig. Wähle $z_1, \dots, z_n \in U_N$ mit $K \subset \bigcup_{k=1}^n B_r(z_k)$ und setze $c := \max_{1\le k\le n} 1/v(z_k)$. Zu $z \in U_N$ existiert ein $1 \le k \le N$ mit $z \in B_r(z_k)$. Mit der Konstanten c_r aus 3.3.4, gilt

$$\frac{1}{v(z)} \le \frac{1}{c_r v(z_k)} \le \frac{c}{c_r}.$$

■

Ein zu 3.3.4 analoges Resultat erhalten wir für Carleson-Gebiete $S(z)$.

Satz 3.3.6. *Falls die Gewichtsfunktion v für ein $s > N$ die Bedingung $D(s)$ erfüllt, so existiert ein $c_s > 0$ mit*

$$\frac{v(z)}{c_s} \le \int_{S(z)} v(w) d\Lambda_N(w) \le c_s v(z)$$

für alle $z \in U_N$, d.h. es gilt

$$\frac{v(z)}{c_s} \le \sigma_v(S(z)) \le c_s v(z).$$

Beweis. Die rechte Ungleichung ergibt sich aus

$$\int_{S(z)} v(w) d\Lambda_N(w) \le c(1-\|z\|^2)^s \int_{S(z)} \frac{v(w)}{|1-(w|z)|^s} d\Lambda_N(w)$$
$$\le c(1-\|z\|^2)^s \int_{U_N} \frac{v(w)}{|1-(w|z)|^s} d\Lambda_N(w)$$
$$\le c_s(1-\|z\|^2)^s \frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s}.$$

Dabei haben wir 2.4.2 und die Definition von $D(s)$ verwendet. Für die linke Ungleichung wählen wir zu $z \in U_N$ ein $w_z \in U_N$ und $r_1 > 0$ wie in 2.4.1. Dann gilt wegen 3.3.4

$$v(z) = c \int_{B_{r_1}(w_z)} v(z) d\Lambda_N(w) \le c \int_{B_{r_1}(w_z)} v(w) d\Lambda_N(w) \le c \int_{S(z)} v(w) d\Lambda_N(w).$$

■

Folgendes Lemma erlaubt es, uns auf stetige D-Gewichte zu beschränken.

Lemma 3.3.7. *Seien $r > 0$ und v eine Gewichtsfunktion. Dann ist die Funktion*

$$\tilde{v}_r : U_N \to \mathbb{R} : z \mapsto \sigma_v(B_r(z))$$

stetig.

BEWEIS. Sei $(z_n)_n$ ein Folge in U_N, welche bezüglich der Bergman-Metrik gegen $z \in U_N$ konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ gilt

$$|\sigma_v(B_r(z_n)) - \sigma_v(B_r(z))| \leq \int_{U_N} |1_{B_r(z_n)} - 1_{B_r(z)}| d\sigma_v = \int_{U_N} 1_{B_r(z_n)\Delta B_r(z)} d\sigma_v.$$

Dabei bezeichnet $A\Delta B$ die symmetrische Differenz von Mengen A und B. Wenn wir

$$\lim_{n\to\infty} 1_{B_r(z_n)\Delta B_r(z)}(w) = 0$$

für Λ_N-fast alle $w \in U_N$ zeigen können, sind wir wegen des Satzes über die majorisierte Konvergenz fertig.

Für $w \in B_r(z)$ setzen wir $s := \beta(z, w)$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\beta(z_n, z) < r - s$ für jedes $n \geq n_0$ gilt. Für diese n haben wir $\beta(z_n, w) \leq \beta(z_n, z) + \beta(z, w) < r$. Also ist $w \in B_r(z_n) \cap B_r(z)$ und somit $1_{B_r(z_n)\Delta B_r(z)}(w) = 0$ für jedes $n \geq n_0$.

Sei andererseits $w \in U_N \setminus \overline{B_r(z)}$, also $t := \beta(z, w) > r$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\beta(z, z_n) < t - r$ für jedes $n \geq n_0$. Damit ist

$$\beta(w, z_n) \geq \beta(w, z) - \beta(z, z_n) \geq t - (t - r) = r.$$

Somit ist $w \in U_N \setminus B_r(z_n)$ und $1_{B_r(z_n)\Delta B_r(z)}(w) = 0$ für jedes $n \geq n_0$. Weil $\overline{B_r(z)} \setminus B_r(z)$ eine Λ_N-Nullmenge ist, sind wir fertig. ■

Gemäss 3.3.4 gilt für $r > 0$

$$\tilde{v}_r(z) = \sigma_v(B_r(z)) \overset{r}{\simeq} v(z) \quad (z \in U_N).$$

falls v ein D-Gewicht ist. v und $\tilde{v}_r$ erzeugen in diesem Fall denselben Bergman-Raum mit äquivalenten Normen. Offensichtlich hat auch $\tilde{v}_r$ die Eigenschaft D. Somit können wir Gewichte mit D immer stillschweigend als stetig voraussetzen.

Korollar 3.3.8. *Falls v die Bedingung $D(s)$ für ein $s > N$ erfüllt, so existiert eine Konstante $c_s > 0$ mit*

$$\frac{1}{c_s} \leq \frac{v(z)}{(1 - \|z\|)^s} \leq c_s \frac{v(\tilde{z})}{(1 - \|\tilde{z}\|^2)^s} \ \forall z \in U_N, \tilde{z} \in S(z).$$

BEWEIS. Gemäss Definition, 3.3.4 und 2.2.2 gilt für jedes $z \in U_N$

$$\begin{aligned} \frac{v(z)}{(1-\|z\|)^s} &\geq \frac{1}{c} \int_{B_1(0)} \frac{v(w)}{|1-(z|w)|^s} d\Lambda_N(w) \geq \frac{1}{c} \int_{B_1(0)} \frac{v(0)}{|1-(z|w)|^s} d\Lambda_N(w) \\ &\geq \frac{1}{c_s} \int_{B_1(0)} \frac{v(0)}{|1-(z|0)|^s} d\Lambda_N(w) \geq \frac{1}{c_s} v(0)\Lambda_N(B_1(0)). \end{aligned}$$

Dies ergibt die linke Ungleichung. Für die rechte Ungleichung seien $r_1>0$ und w_z zu $z\in U_N$ wie in 2.4.1 gewählt. Wegen der Invarianzeigenschaft von Λ_N, 3.3.4, 2.2.2 und 2.4.2 gilt

$$\begin{aligned}\frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s}&=c\frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s}\int_{B_{r_1}(w_z)}d\Lambda_N=c\int_{B_{r_1}(w_z)}\frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s}d\Lambda_N(w)\\&\le c\int_{B_{r_1}(w_z)}\frac{v(w)}{|1-(w\,|\,z)|^s}d\Lambda_N(w)\le c\int_{S(z)}\frac{v(w)}{|1-(w\,|\,z)|^s}d\Lambda_N(w)\\&\le c\int_{S(z)}\frac{v(w)}{|1-(w\,|\,\tilde z)|^s}d\Lambda_N(w)\le c\int_{U_N}\frac{v(w)}{|1-(w\,|\,\tilde z)|^s}d\Lambda_N(w)\\&\le c_s\frac{v(\tilde z)}{(1-\|\tilde z\|^2)^s}.\end{aligned}$$

Dabei geht im letzten Schritt die Definition von $D(s)$ ein. ■

Man rechnet nun leicht nach, dass $\mathcal{A}^p_v$ unter den Voraussetzungen von Korollar 3.3.8 stetig in $\mathcal{A}^p_{s-N-1}$ einbettet. Wir werden in 5.2.1 sehen, dass diese Einbettung sogar kompakt ist, falls v die Bedingung $D^0(s)$ erfüllt.

Wir zeigen nun, dass $D(s)$ stärker ist als $\widetilde{B}_p(s)$. Es gilt etwas allgemeiner

Satz 3.3.9. *Falls v für ein $s>N$ die Bedingung $D(s)$ erfüllt, so genügt v^q für jedes $1<p<\infty$ und $0<q\le 1$ der Bedingung $\widetilde{B}_p(s)$.*

Beweis. Anwendung von 3.3.8 ergibt

$$\begin{aligned}\sigma_{(v^q)_{p,s}}(S(z))&=\int_{S(z)}(v(w)^q)^{-p^*/p}(1-\|w\|^2)^{sp^*}d\Lambda_N(w)\\&=\int_{S(z)}\left(\frac{v(w)}{(1-\|w\|^2)^s}\right)^{-qp^*/p}(1-\|w\|^2)^{sp^*-(qp^*s/p)}d\Lambda_N(w)\\&\le c\left(\frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s}\right)^{-qp^*/p}\int_{S(z)}(1-\|w\|^2)^{p^*s-(qp^*s/p)}d\Lambda_N(w).\end{aligned}$$

Wegen

$$p^*s-\frac{qp^*s}{p}=s\,\frac{p-q}{p-1}>N$$

und da $v_{s((p-q)/(p-1))-N-1}$ für $t>s(p-q)/(p-1)$ die Bedingung $D(t)$ erfüllt, gilt weiter mit 3.3.6

$$\int_{S(z)}(1-\|w\|^2)^{p^*s-(qp^*s/p)}d\Lambda_N(w)\le c\,(1-\|z\|^2)^{p^*s-(qp^*s/p)}.$$

Zusammen haben wir

$$\sigma_{(v^q)_{p,s}}(S(z))\le c\left(\frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s}\right)^{-qp^*/p}(1-\|z\|^2)^{p^*s-qp^*s/p}=c\,v(z)^{-qp^*/p}(1-\|z\|^2)^{p^*s}.$$

Aus 3.3.6 folgt andererseits wegen $q \leq 1$

$$\sigma_{v^q}(S(z)) = \int_{S(z)} v^q d\Lambda_N \leq \left(\int_{S(z)} v d\Lambda_N\right)^q \leq c\, v^q(z).$$

Insgesamt ergibt sich wie behauptet

$$\sigma_{v^q}(S(z))^{1/p} \sigma_{(v^q)_{p,s}}(S(z))^{1/p^*} \leq c\, v(z)^{q/p} v(z)^{-q/p} (1 - \|z\|^2)^s = c\,(1 - \|z\|^2)^s.$$

■

Satz 3.3.10. *Seien $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$ und $s > N$. Genau dann erfüllt v_α die Bedingung $\widetilde{B}_p(s)$, wenn $s > (\alpha+1)/p + N$.*

Beweis. Sei zuerst $s > (\alpha+1)/p + N$. Dann ist $\widetilde{s} := p^*(s - (\alpha+N+1)/p) > N$. Für $t > \widetilde{s}$ erfüllt

$$(v_\alpha)_{p,s}(z) = (1 - \|z\|^2)^{p^*(s-(\alpha+N+1)/p)} = (1 - \|z\|^2)^{\widetilde{s}} = v_{\widetilde{s}-N-1}$$

die Bedingung $D(t)$. Also gilt mit 3.3.6

$$\sigma_{(v_\alpha)_{p,s}}(S(z)) \leq c_{\widetilde{s}}\,(1 - \|z\|^2)^{p^*(s-(\alpha+N+1)/p)}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\sigma_{v_\alpha}(S(z))^{1/p} \sigma_{(v_\alpha)_{p,s}}(S(z))^{1/p^*} &\leq c(1-\|z\|^2)^{(\alpha+N+1)/p}(1-\|z\|^2)^{(s-((\alpha+N+1)/p))}\\ &\leq c(1-\|z\|^2)^s;\end{aligned}$$

v_α erfüllt also $\widetilde{B}_p(s)$.

Für $s \leq (\alpha+1)/p + N$, d.h. $\widetilde{s} \leq N$, haben wir andererseits

$$\begin{aligned}\int_{S(z)} (1-\|w\|^2)^{\widetilde{s}} d\Lambda_N(w) &= \int_{\Phi_z(H_z)} (1-\|w\|^2)^{\widetilde{s}} d\Lambda_N(w)\\ &= \int_{H_z} (1-\|\Phi_z(w)\|^2)^{\widetilde{s}} d\Lambda_N(w)\\ &= \int_{H_z} \left(\frac{(1-\|z\|^2)(1-\|w\|^2)}{|1-(w|z)|^2}\right)^{\widetilde{s}} d\Lambda_N(w)\\ &= (1-\|z\|^2)^{\widetilde{s}} \int_{H_z} \frac{(1-\|w\|^2)^{\widetilde{s}}}{|1-(w|z)|^{\widetilde{s}}} d\Lambda_N(w)\\ &\geq \frac{(1-\|z\|^2)^{\widetilde{s}}}{2^{\widetilde{s}}} \int_{H_z} (1-\|w\|^2)^{\widetilde{s}} d\Lambda_N(w).\end{aligned}$$

Weil das letzte Integral divergiert, kann v_α nicht $\widetilde{B}_p(s)$ erfüllen. ■

Für $(\alpha+1)/p + N < s < \alpha + N + 1$ erfüllt v_α zwar $\widetilde{B}_p(s)$, nicht aber $D(s)$. Also ist $D(s)$ echt stärker als $\widetilde{B}_p(s)$. Weiter kann auch aus $C_p(r)$ nicht ohne weiteres auf $\widetilde{B}_p(s)$ geschlossen werden, denn v_α erfüllt $C_q(r)$ für jedes $\alpha > -1$, während für $\widetilde{B}_p(s)$ zusätzlich $\alpha < p(s-N) - 1$ gefordert wird.

Für das Weitere benötigen wir spezielle Funktionen. Für eine Gewichtsfunktion v, $s > N$, $0 < p < \infty$, und $w, z \in U_N$ definieren wir

$$k_{v,s,p,z}(w) := \frac{(1 - \|z\|^2)^{s/p}}{v(z)^{1/p}(1 - (w \mid z))^{s/p}}.$$

Für die Standardgewichte v_α $(\alpha > -1)$ setzen wir

$$k_{\alpha,p,z}(w) := c_\alpha^{1/p} k_{v_\alpha,2(\alpha+N+1),p,z}(w) = \left(\frac{(1 - \|z\|^2)}{(1 - (w \mid z))^2}\right)^{(\alpha+N+1)/p}.$$

Dabei bezeichnet c_α die Konstante von Seite 27. Direkt aus der Definition folgt

$$k_{\alpha,p,z} = k_{\beta,q,z}$$

falls $(\alpha + N + 1)/p = (\beta + N + 1)/q$. Wegen

$$\begin{aligned}
\|k_{\alpha,p,z}\|_{\alpha,p}^p &= (1 - \|z\|^2)^{\alpha+N+1} \int_{U_N} \frac{1}{|1 - (w|z)|^{2(\alpha+N+1)}} d\sigma_\alpha(w) \\
&= (1 - \|z\|^2)^{\alpha+N+1} \int_{U_N} \frac{1}{(1 - (w|z))^{\alpha+N+1}} \overline{K_{v_{v_\alpha}}(z,w)} d\sigma_\alpha(w) \\
&= (1 - \|z\|^2)^{\alpha+N+1} \delta_z\Big(\frac{1}{(1 - (w|z))^{\alpha+N+1}}\Big) \\
&= \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^{\alpha+N+1}} (1 - \|z\|^2)^{\alpha+N+1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

gilt für jedes $z \in U_N$

$$\|k_{\alpha,p,z}\|_{\alpha,p} = 1.$$

Die $k_{\alpha,p,z}$ sind also die in $\mathcal{A}_\alpha^p$ normalisierten reproduzierenden Kerne von $\mathcal{A}_\alpha^2$.

Für $D(s)$-Gewichte v bilden die Funktionen $k_{v,s,p,z}$ lediglich eine beschränkte Menge in $\mathcal{A}_v^p$:

Lemma 3.3.11. *Sei v eine Gewichtsfunkion, die $D(s)$ für ein $s > N$ erfüllt. Für jedes $0 < p < \infty$ ist dann*

$$\sup_{z \in U_N} \|k_{v,s,p,z}\|_{v,p} < \infty.$$

Beweis. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\|k_{v,s,p,z}\|_{v,p}^p &= \int_{U_N} \frac{(1 - \|z\|^2)^s}{v(z)|1 - (w|z)|^s} d\sigma_v(w) \\
&= \frac{(1 - \|z\|^2)^s}{v(z)} \cdot \int_{U_N} \frac{v(w)}{|1 - (w|z)|^s} d\Lambda_N(w) \\
&\leq c \frac{(1 - \|z\|^2)^s}{v(z)} \cdot \frac{v(z)}{(1 - \|z\|)^s} = c.
\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ergibt sich wieder aus der Definition von $D(s)$. ∎

Setzt man die Funktionen $k_{v,s,p,z}$ in die Auswertungsfunktionale $\delta_a : \mathcal{A}_v^p \to \mathbb{C}$ ein, so erhält man

$$\|\delta_a\| \overset{v,p,s}{\simeq} \frac{1}{v(a)^{1/p}}.$$

Wir verallgemeinern jetzt Überlegungen aus [Dom97] und bestimmen den Dualraum von $\mathcal{A}_v^1$ für D-Gewichte v. Dazu benötigen wir Räume vom Bloch-Typ, welche in gewisser Weise als L^∞-Versionen der Bergman-Räume betrachtet werden können. Es handelt sich dabei um Kopien des Raumes $L^\infty(\Lambda_N)$ und dessen Teilraum $C_0(U_N) := \{f : U_N \to \mathbb{C} \text{ stetig} : \lim_{\|z\|\to 1} |f(z)| = 0\}$.

Sei v eine Gewichtsfunktion. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{v}} &:= \{f : U_N \to \mathbb{C} \text{ messbar}, \ \|f\|_{v,\infty} := \sup_{z \in U_N} |f(z)| v(z) < \infty\}, \\
\boldsymbol{X_v} &:= \widehat{X}_v \cap \mathcal{H}(U_N), \\
\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{0}} &:= \{f : U_N \to \mathbb{C} \text{ stetig}, \ : \lim_{\|z\|\to 1} |f(z)| v(z) = 0\}, \\
\boldsymbol{X_v^0} &:= \widehat{X}_v^0 \cap \mathcal{H}(U_N).
\end{aligned}$$

Unter $\|\cdot\|_{v,\infty}$ ist $\widehat{X}_v$ ein Banach-Raum, und $\widehat{X}_v^0$ ist ein Teilraum von $\widehat{X}_v$. Der Multiplikationsoperator $f \to f \cdot v$ vermittelt einen isometrischen Isomorphismus von $\widehat{X}_v$ auf $L^\infty(\Lambda_N)$ und für stetige Gewichte v von $\widehat{X}_v^0$ auf $C_0(U_N)$. Falls $1/v$ lokalbeschränkt ist, so sind auch X_v und X_v^0 vollständig. In dieser Situation gelten $\widehat{X}_v^0 \subset \widehat{X}_v$ und $X_v^0 \subset X_v$. Nach 3.3.5 ist dies insbesondere richtig für D-Gewichte v.

Es kann passieren, dass der Raum $\widehat{X}_v$ trivial ist. Zum Beispiel folgt aus dem Maximumprinzip, dass $X_v = \{0\}$ für Gewichte v mit $\lim_{\|z\|\to 1} 1/|v(z)| = 0$ gilt.

Für Gewichte v mit $C_q(r)$ folgt aus

$$|f(a)|^p v(a) \leq c_r \int_{B_r(a)} |f(z)|^p d\sigma_v(z) \leq c_r \|f\|_{v,p}^p \qquad \forall a \in U_N,\ 0 < r < \infty, \tag{3.4}$$

dass $\mathcal{A}_v^p \subset X_{v^{1/p}}$ für jedes $0 < p < \infty$ gilt und die Einbettung stetig ist. Für stetige Gewichte, die $\lim_{\|z\|\to 1} v(z) = 0$ erfüllen, können wir etwas mehr zeigen.

Satz 3.3.12. *Für ein stetiges $C_q(r)$-Gewicht v mit $\lim_{\|z\|\to 1} v(z) = 0$ gilt $\mathcal{A}_v^p \subset X_{v^{1/p}}^0$.*

Beweis. Seien $f \in \mathcal{A}_v^p$, $\varepsilon > 0$ und c_r die Konstante aus 3.4. Nach Voraussetzung existiert $L := \sup_{z \in U_N} v(z)^{1/p}$. Wegen 3.1.1 existiert ein $0 < r_0 < 1$, so dass

$$\|f - f_{r_0}\|_{v,p} \leq \frac{\varepsilon}{2 c_r L}.$$

Da $f_{r_0} : \overline{U_N} \to \mathbb{C}^N$ stetig ist, existiert ein $M > 0$ mit $|f_{r_0}(z)| \leq M$ für alle $z \in \overline{U_N}$. Weiter existiert nach Voraussetzung ein $0 < r_1 < 1$ mit $v(z)^{1/p} \leq \varepsilon/(2M)$ für $\|z\| \geq r_1$. Für diese z haben wir

$$\begin{aligned}
|f(z)| v(z)^{1/p} &\leq |f(z) - f_{r_0}(z)| v(z)^{1/p} + |f_{r_0}(z)| v(z)^{1/p} \\
&\leq c_r L \|f - f_0\|_{v,p} + M v(z)^{1/p} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. ■

Für $a \in U_N$ ist weiter $|f(a)| \le c_r \frac{1}{v(a)} \|f\|_{v,\infty}$, so dass auch das Auswertungsfunktional

$$\delta_a : X_v \to \mathbb{C} : f \mapsto f(a)$$

beschränkt ist.

Wenn v der Bedingung D genügt, können wir mehr zeigen. Für $a \in U_N$ und $z \in B_r(a)$ existiert eine von a und z unabhängige Konstante $c_r > 0$ mit

$$|f(z)| \le c_r \frac{1}{v(z)} \|f\|_{v,\infty} \le c_r \frac{1}{v(a)} \|f\|_{v,\infty}.$$

Also finden wir zu jeder kompakten Menge $K \subset U_N$ eine Konstante $c_K > 0$, so dass

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \le c_K \|f\|_{v,\infty}.$$

Die Einbettung $X_v \to \mathcal{H}(U_N)$ ist also beschränkt.

Lemma 3.3.13. *Sei v eine Gewichtsfunktion mit $D(s)$ $(s > N)$. Für $f \in \mathcal{A}^1_v$ und $g \in X_{v_{1,s}}$ ist $f \cdot g \in \mathcal{A}^1_{s-N-1}$ mit*

$$\|f \cdot g\|_{s-N-1,1} \le \|f\|_{v,1} \, \|g\|_{v_{1,s},\infty}.$$

Insbesondere gelten $X_{v_{1,s}} \hookrightarrow \mathcal{A}^1_{s-N-1}$ und $\mathcal{A}^1_v \hookrightarrow \mathcal{A}^1_{s-N-1}$ mit Norm 1.

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus der Definition von $v_{1,s}$ (vgl. Seite 27) und

$$\int_{U_N} |f \cdot g| d\sigma_{s-N-1} = \int_{U_N} |f(z)| v(z) |g(z)| v(z)^{-1} (1 - \|z\|^2)^s d\Lambda_N(z) \le \|f\|_{v,1} \, \|g\|_{v_{1,s},\infty}.$$

Die Zusätze ergeben sich, weil $f \equiv 1$ zu $\mathcal{A}^1_v$ und $g \equiv 1$ zu $X_{v_{1,s}}$ gehören (vgl. 3.3.8). ■

Als nächstes untersuchen wir die auf Seite 31 eingeführten Projektionen P_s auf den Räumen $L^1(\sigma_v)$ und $L^\infty(\Lambda_N) = L^\infty(\sigma_v)$.

Satz 3.3.14. *Für jede Gewichtsfunktion v mit $D(s)$ $(s > N)$ induziert P_s einen beschränkten Operator*

$$P_s : L^1(\sigma_v) \to L^1(\sigma_v) \tag{3.5}$$

mit Bild $\mathcal{A}^1_v$. Weiter ist

$$P_{s,v} : L^\infty(\Lambda_N) \to X_{v_{1,s}} : f \mapsto \int_{U_N} \frac{f(w)}{(1 - (\cdot \mid w))^s} d\sigma_v(w) \tag{3.6}$$

wohldefiniert und beschränkt.

Beweis. Für $f \in L^1(\sigma_v)$ gilt mit einer Konstanten $c > 0$ nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_{U_N} \int_{U_N} \frac{|f(w)|(1 - \|w\|^2)^s}{|1 - (z|w)|^s} d\Lambda_N(w) d\sigma_v(z) \\ &\le c \int_{U_N} |f(w)|(1 - \|w\|^2)^s \frac{v(w)}{(1 - \|w\|^2)^s} d\Lambda_N(w) \\ &= c \|f\|_{v,1}.\end{aligned}$$

Somit existiert $P_s(f)(z)$ für fast alle $z \in U_N$, und es gilt $\|P_s(f)\|_{v,1} \leq \|f\|_{v,1}$.

Sei jetzt $f \in L^\infty(\Lambda_N)$. Offensichtlich ist $P_{s,v}f$ analytisch. Mit einer Konstanten $c > 0$ haben wir für jedes $z \in U_N$ (wegen $D(s)$)

$$\begin{aligned}|P_{s,v}f(z)| &\leq \int_{U_N} \frac{|f(w)|v(w)}{|1-(z|w)|^s} d\Lambda_N(w) \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{U_N} \frac{v(w)}{|1-(z|w)|^s} d\Lambda_N(w) \leq c\|f\|_\infty \frac{v(z)}{(1-\|z\|^2)^s}.\end{aligned}$$

Daher ist $P_{s,v}f \in X_{v_{1,s}}$ mit $\|P_{s,v}f\|_{v_{1,s},\infty} \leq c\|f\|_\infty$. ■

Für D-Gewichte können wir schliesslich auch den Dualraum von $\mathcal{A}_v^1$ bestimmen.

Satz 3.3.15. *Für jede Gewichtsfunktion v mit $D(s)$ $(s > N)$ gilt*

$$(\mathcal{A}_v^1)^* \simeq X_{v_{1,s}}.$$

Die Identifikation wird durch den (konjugiert linearen) Isomorphismus

$$\Phi : X_{v_{1,s}} \to (\mathcal{A}_v^1)^* : g \mapsto \left[\Phi_g : f \mapsto \int_{U_N} f(z)\overline{g(z)}(1-\|z\|^2)^s d\Lambda_N(z)\right]$$

gegeben.

Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir

$$\langle f, g\rangle_s := \int_{U_N} f(z)\overline{g(z)}(1-\|z\|^2)^s d\Lambda_N(z)$$

für $s > N$, sofern der Ausdruck auf der rechten Seite Sinn macht. Ebenso sei

$$\langle f, g\rangle_{\Lambda_N} := \int_{U_N} f(z)\overline{g(z)} d\Lambda_N(z).$$

Beweis. Wegen 3.3.13 gilt für $f \in \mathcal{A}_v^1$ und $g \in X_{v_{1,s}}$

$$|\langle f, g\rangle_s| \leq \|f\|_{v,1}\ \|g\|_{v_{1,s},\infty}.$$

Für jedes $g \in X_{v_{1,s}}$ ist also

$$\Phi_g := \langle \cdot, g\rangle_s \in (\mathcal{A}_v^1)^*$$

wohldefiniert und beschränkt mit $\|\Phi_g\| \leq \|g\|_{v_{1,s},\infty}$, und

$$\Phi : X_{v_{1,s}} \to (\mathcal{A}_v^1)^* : g \mapsto \Phi_g$$

existiert als beschränkter, konjugiert linearer Operator.

Sei jetzt $\varphi \in (\mathcal{A}_v^1)^*$ gegeben. Zu $\varphi \circ P_s \in (L^1(\sigma_v))^*$ existiert ein $g_\varphi \in L^\infty(\sigma_v) = L^\infty(\Lambda_N)$ mit

$$(\varphi \circ P_s)(f) = \int_{U_N} f\overline{g_\varphi} d\sigma_v$$

für jedes $f \in L^1(\sigma_v)$. Speziell für $f \in \mathcal{A}_v^1$ haben wir

$$\begin{aligned}
\varphi(f) = \varphi(P_s f) &= \int_{U_N} (P_s f)(z)\overline{g_\varphi(z)}d\sigma_v(z) \\
&= \int_{U_N}\int_{U_N} f(w)\frac{(1-\|w\|^2)^s}{(1-(z|w))^s}d\Lambda_N(w)\overline{g_\varphi(z)}\,d\sigma_v(z) \\
&= \int_{U_N} f(w)(1-\|w\|^2)^s\overline{\int_{U_N}\frac{1}{(1-(w|z))^s}g_\varphi(z)d\sigma_v(z)}\,d\Lambda_N(w) \\
&= \int_{U_N} f(w)(1-\|w\|^2)^s\overline{P_{s,v}g_\varphi(w)}d\Lambda_N(w).
\end{aligned}$$

Da $P_{s,v}(g_\varphi)$ in $X_{v_{1,s}}$ liegt, ist Φ also surjektiv. Φ ist auch injektiv, denn falls $\Phi_g = 0$ für ein $g \in X_{v_{1,s}}$, so gilt für alle $z \in U_N$

$$0 = \Phi_g\left(\frac{1}{(1-(\cdot\,|\,z))^s}\right) = \int_{U_N} g(w)\frac{(1-\|w\|^2)^s}{(1-(w\,|\,z))^s}d\Lambda_N(w) = g(z). \qquad \blacksquare$$

Die im Folgenden eingeführte Berezin-Transformation übernimmt für Bergman-Räume die Rolle, welche die Poisson-Transformation bei Hardy-Räumen spielt.

Seien μ ein komplexes (Borel-)Mass auf U_N, v eine Gewichtsfunktion, welche $D(s)$ erfüllt $(s > N)$ und $0 < p, q < \infty$. Dann existiert für jedes $w \in U_N$

$$(B_v^{p,q,s}\mu)(w) := \int_{U_N} \frac{(1-\|w\|^2)^{sq/p}}{v(w)^{q/p}|1-(z\,|\,w)|^{sq/p}}d\mu(z) = \|k_{v,s,p,w}\|_{\mu,q}^q\,.$$

$B_v^{p,q,s}\mu$ ist die **Berezin-Transformierte** von μ zu den Daten (v,p,q,s). Zum Beispiel gilt für die Standardgewichte v_α $(\alpha > -1)$ mit $s = 2(\alpha+N+1)$

$$(B_{v_\alpha}^{p,q,s}\mu)(w) = \frac{1}{c_\alpha^{q/p}}\int_{U_N}\left(\frac{1-\|w\|^2}{|1-(z\,|\,w)|^2}\right)^{(\alpha+N+1)q/p} d\mu(z).$$

Hier ist c_α wieder die normalisierende Konstante von Seite 27. Wegen

$$v(w)^{q/p}|(B_v^{p,q,s}\mu)(w)| \le \left(\frac{1-\|w\|^2}{1-\|w\|}\right)^{sq/p} |\mu|(U_N) \le 2^{sq/p}\,\|\mu\|$$

für alle $w \in U_N$ gehört $B_v^{p,q,s}\mu$ zu $\widehat{X}_{v^{q/p}}$ mit $\|B_v^{p,q,s}\mu\|_{v^{q/p},\infty} \le 2^{sq/p}\,\|\mu\|$. Also wird durch

$$B_v^{p,q,s} : \mathcal{M}(U_N) \to \widehat{X}_{v^{q/p}} : \mu \mapsto B_v^{p,q,s}\mu$$

ein beschränkter, linearer Operator definiert, die **Berezin-Transformation** zu unseren Daten.

Ist v sogar eine stetige Gewichtsfunktion, so sieht man wegen der Stetigkeit von Parameterintegralen, dass auch die Berezin-Transformierte $B_v^{p,q,s}\mu$ stetig ist.

3.4. Hardy-Räume

Wir führen an dieser Stelle die Hardy-Räume auf U_N ein, weil sie in verschiedener Hinsicht als Grenzfall $\alpha=-1$ der klassisch gewichteten Bergman-Räume betrachtet werden können. Wir stellen einige bekannte Resultate zusammen, die wir später benötigen werden. Für eine umfassende Behandlung verweisen wir auf [Dur70] ($N=1$), [Rud80] und [Zhu05].

Für $0<p<\infty$ besteht der **Hardy-Raum**

$$H^p$$

aus den Funktionen $f\in\mathcal{H}(U_N)$ mit

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1}\left(\int_{S_N} |f(rz)|^p dm_N(z)\right)^{1/p} < \infty.$$

$\|\cdot\|_{H^p}$ definiert eine vollständige $\min\{1,p\}$-Norm auf H^p. Der Raum

$$H^\infty$$

besteht aus den beschränkten holomorphen Funktionen auf U_N. Unter der Norm

$$\|f\|_{H^\infty} := \sup_{z\in U_N} |f(z)|$$

ist das ein Banach-Raum.

Jede Funktion $f\in H^p$ $(0<p\leq\infty)$ kann durch die für $0<r<1$ auf $\overline{U_N}$ definierten Funktionen

$$f_r(z) := f(rz) \qquad z \in \overline{U_N}$$

approximiert werden. Genauer haben wir $\lim_{r\to 1}\|f-f_r\|_{H^p}=0$.

Ein bekanntes Resultat von Fatou besagt, dass für jede Funktion $f\in H^p$ $(0<p<\infty)$

$$f^*(\zeta) := \lim_{r\to 1} f(r\zeta)$$

für m_N-fast alle $\zeta\in S_N$ existiert, und es gilt

$$\|f^*\|_{p,m_N} = \|f\|_{H^p}\,.$$

Durch $f\mapsto f^*$ wird H^p also isometrisch isomorph zu einem Teilraum von $L^p(m_N)$. Wir bezeichnen das Bild mit $H^p(S_N)$.

Wie bei den Bergman-Räumen sind die Auswertungsfunktionale

$$\delta_z : H^p \to \mathbb{C} : f \mapsto f(z)$$

für jedes $z\in U_N$ beschränkt. Dies folgt sofort aus der Ungleichung

$$|f(z)| \leq \frac{2^{N/p}}{(1-\|z\|^2)^{N/p}}\,\|f\|_{H^p}\,, \tag{3.7}$$

welche für jedes $f\in H^p$ und jedes $z\in U_N$ gilt. Bis auf die Konstanten ist dies die Formel (3.2) mit $\alpha=-1$. Weil uns dieses Phänomen noch mehrmals begegnen wird, bezeichnen wir H^p gelegentlich auch mit

$$\mathcal{A}^p_{-1}.$$

Wie bei den Bergman-Räumen existiert im Fall $p=2$ ein reproduzierender Kern, d.h. eine Funktion $K_{-1}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ auf $U_N \times S_N$, so dass $K_{-1}(z,\,\cdot\,) \in H^2(S_N)$ für $z \in U_N$ und

$$f(z) = \delta_z(f) = (f \mid K_{-1}(z,\,\cdot\,)).$$

$K_{-1}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ ist der **Cauchy-Szegö-Kern** und wird gegeben durch

$$K_{-1}(z,\zeta) = \frac{1}{(1-(\zeta \mid z))^N}.$$

In Analogie zum Bergman-Raum-Fall definieren wir für $0<p<\infty$ und $z \in U_N$

$$k_{-1,p,z}(w) := \frac{(1-\|z\|^2)^{N/p}}{(1-(w \mid z))^{2N/p}} \qquad (w \in U_N).$$

Als beschränkte analytische Funktion gehört $k_{-1,p,z}$ für jedes $z \in U_N$ zu H^p. Es handelt sich um einen Einheitsvektor:

$$\begin{aligned}\|k_{-1,p,z}\|_{H^p}^p &= \int_{S_N} \frac{(1-\|z\|^2)^N}{|1-(\zeta|z)|^{2N}} dm_N(\zeta) = (1-\|z\|^2)^N \int_{S_N} K_{-1}(z,\zeta)\overline{K_{-1}(z,\zeta)} dm_N(\zeta) \\ &= (1-\|z\|^2)^N \delta_z(K_{-1}(z,\cdot)) = 1.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Für jede kompakte Menge $K \subset U_N$ existiert eine Konstante $c_{K,p} > 0$, so dass

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \le c_{K,p} \, \|f\|_{H^p} \qquad \forall f \in H^p \quad 0<p<\infty;$$

H^p bettet also stetig in $\mathcal{H}(U_N)$ ein. Aus (3.7) ergibt sich sogar, dass H^p stetig nach X_v mit $v=(1-\|\cdot\|^2)^{N/p}$ einbettet. Wir können etwas mehr zeigen.

Satz 3.4.1. *Sei $0<p<\infty$. Für $v=(1-\|\cdot\|^2)^{N/p}$ gilt $H^p \subset X_v^0$. Die Einbettung ist stetig.*

Beweis. Seien $f \in H^p$ und $\varepsilon>0$. Wähle $0<r_0<1$ so, dass

$$\|f - f_{r_0}\|_{H^p} \le \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^{N/p}}.$$

Da $f_{r_0} : \overline{U_N} \to \mathbb{C}$ stetig ist, existiert ein $M>0$ mit

$$|f_{r_0}(z)| \le M \text{ für alle } z \in \overline{U_N}.$$

Weiter existiert ein $0<r_1<1$ mit $(1-\|w\|^2)^{N/p} \le \varepsilon/(2M)$ für $\|w\|>r_1$. Für diese w haben wir also

$$\begin{aligned}|f(w)|(1-\|w\|^2)^{N/p} &\le |f(w)-f_{r_w}(z)|(1-\|w\|^2)^{N/p} + |f_{r_0}(w)|(1-\|w\|^2)^{N/p} \\ &\le 2^{N/p}\|f-f_{r_0}\|_{H^p} + M(1-\|w\|^2)^{N/p} \le \varepsilon,\end{aligned}$$

und dies beweist die Behauptung. ■

Für die Zugehörigkeit einer Funktion zu einem Hardy-Raum sind insbesondere die Funktionswerte in der Nähe des Randes entscheidend. Eine Möglichkeit, diese zu erfassen, bieten Maximalfunktionen. Für eine stetige Funktion $f: U_N \to \mathbb{C}$ und $\delta>0$ ist die **Maximalfunktion $\boldsymbol{M_\delta f}$** durch

$$M_\delta f(\zeta) := \sup_{z\in D_\delta(\zeta)} |f(z)| \qquad (\zeta \in S_N) \tag{3.9}$$

definiert. Für die Definition der Approximationsgebiete $D_\delta(\zeta)$ vgl. (2.11). Es existiert ein $c>0$, so dass für jedes $f \in H^p$ $(0<p<\infty)$

$$\left(\int_{S_N} |M_\delta f(\zeta)|^p dm_N(\zeta)\right)^{1/p} \leq c \, \|f\|_{H^p} . \tag{3.10}$$

Wir werden bei der Charakterisierung von Carleson-Massen für Hardy-Räume davon Gebrauch machen.

3.5. Atomare Zerlegung

Die nachfolgend durchgeführte „atomare Zerlegung" von Bergman-Räumen mit D-Gewichten beruht im Wesentlichen auf Ideen aus [CR80]. Der Fall $N=1$ wurde für v_0 bereits in [LP71] erledigt. Für Bergman-Räume mit Standardgewichten vergleiche auch [Zhu05].

Da gewisse Vorüberlegungen unter allgemeineren Voraussetzungen gelten und wir diese später nutzbringend verwenden können, holen wir etwas aus. Wir fixieren zunächst für ein $0<r<\infty$ ein r-Netz $(z_n)_n$ in U_N; sei κ dessen Überdeckungskonstante, und sei $0<p<\infty$. Weiter sei v eine Gewichtsfunktion, die $C_q(r)$ für ein $1<q<\infty$ erfüllt. Für jede analytische Funktion $f: U_N \to \mathbb{C}$ gilt wegen 3.2.3 mit einer Konstanten $c>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(z_n)|^p \sigma_v(B_r(z_n)) \leq c \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} |f|^p d\sigma_v \leq \kappa c \int_{U_N} |f|^p d\sigma_v .$$

Wir schliessen, dass

$$R_{v,p} : \mathcal{A}^p_v \to l^p : f \mapsto (f(z_n)\sigma_v(B_r(z_n))^{1/p})_n$$

ein wohldefinierter und stetiger Operator ist. Falls v für ein $1<p<\infty$ der Bedingung $\widetilde{B}_p(s)$ $(s>N)$ genügt, so erfüllt $v_{p,s}$ die Bedingung $\widetilde{B}_{p^*}(s)$ und damit ebenfalls die Bedingung $C_q(r)$ für jedes $1<q<\infty$ (vgl. 3.3). Somit ist $R_{v_{p,s},p^*}$ wohldefiniert, und der adjungierte Operator

$$R^*_{v_{p,s},p^*} : l^p \to \left(\mathcal{A}^{p^*}_{v_{p,s}}\right)^* \simeq \mathcal{A}^p_v$$

existiert. Wir verwenden in der Folge die eher unübliche, aber für unsere Zwecke praktischere „konjugiert lineare Identifikation"

$$l^{p^*} \to (l^p)^* : (b_n)_n \mapsto \Big[(a_n)_n \mapsto \sum_n a_n \overline{b_n}\Big].$$

und setzen entsprechend

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle_{l^p} := \sum_n a_n \overline{b_n}.$$

Für $f\in\mathcal{A}^{p^*}_{v_{p,s}}$ und jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle f,R^*_{v_{p,s},p^*}e_n\rangle_s &= \langle R_{v_{p,s},p^*}f,e_n\rangle_{l^p}\\ &= f(z_n)\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}\\ &= \langle f,\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}K_s(z_n,\cdot)\rangle_{\Lambda_N}\\ &= \langle f,\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}\frac{1}{(1-(z_n|\cdot))^s}\rangle_s.\end{aligned}$$

Somit haben wir

$$R^*_{v_{p,s},p^*}((a_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}\frac{1}{(1-(\cdot\,|\,z_n))^s}.$$

Erfüllt v sogar D, so gilt

$$\frac{1}{c}\frac{(1-\|a\|)^s}{v(a)^{1/p}} \overset{3.3.4(ii)}{\leq} \frac{(1-\|a\|^2)^s}{\sigma_v(B_r(a))^{1/p}} \overset{(3.1)}{\leq} c\,\sigma_{v_{p,s}}(B_r(a))^{1/p^*}.$$

Für $(a_n)_n\in l^p$ ist somit auch $(\frac{(1-\|z_n\|)^s}{v(z_n)^{1/p}\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}}a_n)_n\in l^p$, und wir haben

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot|z_n))^s}\right\|_{v,p} &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}}a_n\right)\frac{\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}}{(1-(\cdot|z_n))^s}\right\|_{v,p}\\ &= \left\|R^*_{v_{p,s},p^*}\left(\left(\frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}}a_n\right)_n\right)\right\|_{v,p}\\ &\leq c\left\|\left(\frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}\sigma_{v_{p,s}}(B_r(z_n))^{1/p^*}}a_n\right)_n\right\|_p\\ &\leq c\|(a_n)_n\|_p.\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass

$$T^{(p)}_{v,s}: l^p\to\mathcal{A}^p_v:(a_n)_n\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot\,|\,z_n))^s}$$

wohldefiniert ist. Offenbar handelt es sich um einen linearen und stetigen Operator.

Betrachten wir für $p=1$ eine Gewichtsfunktion v, für welche $v_{1,s}$ die Bedingung $D(s)$ für $s>N$ erfüllt, so erhalten wir ebenso einen beschränkten Operator

$$T^{(\infty)}_{v,s}: l^\infty\to X_v:(a_n)_n\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot\,|\,z_n))^s}.$$

Seien nun $0<p\leq 1$ und v eine Gewichtsfunktion mit der Eigenschaft $D(s)$ für ein $s>N$. Wir haben

$$\left\|\frac{1}{(1-(\cdot\,|\,a))^{s/p}}\right\|^p_{v,p} = \int_{U_N}\frac{v(z)}{|1-(z\,|\,a)|^s}d\Lambda_N(z)\leq c\,\frac{v(a)}{(1-\|a\|^2)^s}.$$

Für jede Folge $(a_n)_n$ in l^p ergibt sich

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(1-\|z_n\|^2)^{s/p}}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot\,|\,z_n))^s}\right\|_{v,p}^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)} \left\|\frac{1}{(1-(\cdot\,|\,z_n))^{s/p}}\right\|_{v,p}^p$$
$$\leq c \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p.$$

Auch in diesem Fall wird durch

$$T_{v,s}^{(p)} : l^p \to \mathcal{A}_v^p : (a_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(1-\|z_n\|^2)^{s/p}}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot\,|\,z_n))^{s/p}}$$

also ein beschränkter linearer Operator definiert. Zusammen haben wir gezeigt:

Satz 3.5.1. *Für $0 < p < \infty$, $s > N$ und eine Gewichtsfunktion v definiert*

$$T_{v,t}^{(p)} : l^p \to Z : (a_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(1-\|z_n\|^2)^t}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot\,|\,z_n))^t}$$

einen beschränkten Operator, falls

(i) $0 < p \leq 1$, $Z = \mathcal{A}_v^p$, *v die Bedingung $D(s)$ erfüllt und $t = s/p$ ist,*

oder falls

(ii) $1 < p < \infty$, $Z = \mathcal{A}_v^p$, *v die Bedingungen $\widetilde{B}_p(s)$ und D erfüllt und $t = s$ gilt,*

oder falls

(iii) $p = \infty$, $Z = X_v$, *$v_{1,s}$ die Bedingung $D(s)$ erfüllt und $t = s$ gilt.*

Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass bei geeignet gewähltem r-Netz der Operator $T_{v,t}^{(p)}$ sogar surjektiv ist. Genauer wollen wir folgenden Satz beweisen.

Satz 3.5.2. *Seien $0 < p \leq \infty$, v, s und t wie in 3.5.1. Dann existiert ein Operator $R_v : \mathcal{A}_v^p \to l^p$, so dass*

$$\left\|T_{v,t}^{(p)} R_v - Id_{\mathcal{A}_v^p}\right\| < 1. \tag{3.11}$$

Somit ist unter diesen Voraussetzungen $\mathcal{A}_v^p$ isomorph zu einem Quotienten von l^p.

Bemerkung 3.5.3. Ersetzt man in den zwei vorangehenden Aussagen den Operator $T_{v,t}^{(p)}$ durch

$$l^p \to \mathcal{A}_v^p : (a_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{\sigma_v(B_r(z_n))^{1/p}(1-(\,\cdot\,|\,z_n))^s},$$

so gilt für den Fall $1 < p < \infty$ eine zu 3.5.1(ii) analoge Aussage für beliebige $\widetilde{B}_p(s)$-Gewichte v. Ebenso bleibt unter diesen Bedingungen 3.5.2 richtig. Der Beweis dafür ergibt sich durch leichte Modifkationen der folgenden Ausführungen.

Das folgende zentrale Resultat über die **atomare Zerlegung** zeigt, dass mehr möglich ist.

Satz 3.5.4. *Seien $0<p\le\infty$, v, s wie in 3.5.1. Dann gelten $X_v\simeq l^\infty$ sowie $\mathcal{A}_v^p\simeq l^p$ für $0<p<\infty$.*

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen aus 3.5.2. Wegen (3.11) ist $T_{v,t}^{(p)}R_v$ bijektiv, also $T_{v,t}^{(p)}$ surjektiv und R_v injektiv. Weiter haben wir $T_0R_v=Id_{\mathcal{A}_v^p}$, wobei wir $T_0:=(T_{v,t}^{(p)}R_v)^{-1}T_{v,t}^{(p)}$ gesetzt haben. Also ist $P:=R_vT_0$ eine Projektion in l^p. Sofort rechnet man nach, dass das Bild von P mit dem Bild von R_v zusammenfällt. Dass daher das Bild von R_v isomorph zu l^p ist, folgt für $1\le p\le\infty$ aus [Peł60] (vgl. auch [LT73]) und für $0<p<1$ aus [Sti72]. ■

Für $N=1$ und $0<p<1$ vgl. auch [KT82].

Für den Beweis von 3.5.2 benötigen wir als erstes eine passende Zerlegung des Einheitsballes.

Seien $R>0$ fest gewählt und $(w_n)_n$ ein R-Netz in U_N. Für $0<r<R$ sei $(z_n)_n$ ein weiteres r-Netz in U_N. Wir konstruieren eine spezielle Abzählung der z_n. Seien $z_{1,l}$ $(1\le l\le l_1)$ diejenigen Folgenglieder, welche in $B_R(w_1)$, aber nicht in $B_{R/2}(w_k)$ für $k\ge 2$ liegen. Weiter seien $z_{2,l}$ $(1\le l\le l_2)$ die z_n aus $B_R(w_2)$, welche wir noch nicht gewählt haben, und die für kein $k\ge 3$ in $B_{R/2}(w_k)$ liegen. So fortfahrend erhalten wir eine Abzählung $(z_{k,l})_{k,l}$ $(1\le k<\infty,\ 1\le l\le l_k)$ von $(z_n)_n$, so dass jedes $z_{k,l}$ in $B_R(w_k)$ liegt und jedes z_n in $B_{R/2}(z_k)$ unter den $z_{k,l}$ auftritt.

Als nächstes konstruieren wir mithilfe des r-Verbandes $(z_{k,l})_{k,l}$ eine disjunkte Überdeckung von U_N. Wir bilden

$$D_{1,1}:=B_r(z_{1,1})\setminus\bigcup_{(m,n)\ne(1,1)}B_{r/2}(z_{m,n})$$

und weiter für $2\le l\le l_1$

$$D_{1,l}:=B_r(z_{1,l})\setminus\Big(\bigcup_{(m,n)\ne(1,l)}B_{r/2}(z_{m,n})\cup\bigcup_{j=1}^{l-1}D_{1,j}\Big).$$

Für $k\ge 2$ setzen wir

$$D_{k,1}=B_r(z_{k,1})\setminus\Big(\bigcup_{(m,n)\ne(k,1)}B_{r/2}(z_{m,n})\cup\bigcup_{1\le m<k,1\le n\le l_k}D_{m,n}\Big)$$

und für $1\le l\le l_k$

$$D_{k,l}:=B_r(z_{k,l})\setminus\Big(\bigcup_{(m,n)\ne(k,l)}B_{r/2}(z_{m,n})\cup\bigcup_{1\le m<k,1\le n\le l_k}D_{m,n}\cup\bigcup_{j=1}^{l-1}D_{k,j}\Big).$$

Aus [Lue85b] übernehmen wir

Lemma 3.5.5. *Seien $0<R<\infty$ und $0<p<\infty$. Dann existiert eine Konstante $c_R>0$, so dass*

$$|f'(z)|^p\le c_R\int_{B_R(z)}|f|^p d\Lambda_N$$

für jedes $f\in\mathcal{H}(U_N)$ und $z\in U_N$ gilt.

Seien $0<p<\infty$, v, t und s wie in 3.5.1 gewählt und

$$\beta := t - N - 1.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{k,l}|f(z_{k,l})|^p v(z_{k,l})\frac{\sigma_\beta(D_{k,l})^p}{(1-\|z_{k,l}\|^2)^{tp}} &\le \sum_{k,l}|f(z_{k,l})|^p v(z_{k,l})\frac{\sigma_\beta(B_r(z_{k,l}))^p}{(1-\|z_{k,l}\|^2)^{(\beta+N+1)p}}\\ &\le c_r\sum_{k,l}|f(z_{k,l})|^p v(z_{k,l}) \le c_r\,\|R_{v,p}(f)\|_p^p\end{aligned}$$

ist

$$R_v : \mathcal{A}_v^p \to l^p : f \mapsto \left(f(z_{k,l})v(z_{k,l})^{1/p}\frac{\sigma_\beta(D_{k,l})}{(1-\|z_{k,l}\|^2)^t}\right)_{k,l}$$

ein beschränkter Operator. In der Folge unterdrücken wir zur Vereinfachung der Notation die Abhängigkeit von den gewählten Parametern. Wir sind am Operator $S = T_{v,t}^{(p)} R_v$ interessiert. Er wird durch

$$S(f) = \sum_{k,l}^{\infty} f(z_{k,l})\frac{\sigma_\beta(D_{k,l})}{(1-(\,\cdot\mid z_{k,l}))^t}$$

für $f\in\mathcal{A}_v^p$ gegeben. Die Hauptarbeit steckt in folgender Abschätzung.

Lemma 3.5.6. *Für jedes $0<p<\infty$ und jede D-Gewichtsfunktion v existiert eine Konstante c_R, so dass*

$$|f(w)-S(f)(w)| \le c_R\, r\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\|w_k\|)^t}{|1-(w\mid w_k)|^t v(w_k)^{1/p}}\left(\int_{B_{2R}(w_k)}|f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^{1/p}$$

für jedes $f\in\mathcal{A}_v^p$ gilt.

Beweis. Da die Polynome dicht in $\mathcal{A}_v^p$ liegen, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $f\in\mathcal{A}_\beta^p$ voraussetzen. Gemäss den Vorüberlegungen und 3.3.14 gilt für jedes $w\in U_N$

$$\begin{aligned}|f(w)-Sf(w)| &= \left|\int_{U_N}\frac{f(z)}{(1-(w\mid z))^t}d\sigma_\beta(z) - \sum_{k,l}^{\infty} f(z_{k,l})\frac{\sigma_\beta(D_{k,l})}{(1-(w\mid z_{k,l}))^t}\right|\\ &= \left|\sum_{k,l}\int_{D_{k,l}}\frac{f(z)}{(1-(w\mid z))^t}-\frac{f(z_{k,l})}{(1-(w\mid z_{k,l}))^t}d\sigma_\beta(z)\right| \\ &\le I(w)+J(w),\end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei

$$I(w) = \sum_{k,l}\int_{D_{k,l}}\left|\frac{f(z)-f(z_{k,l})}{(1-(w\mid z_{k,l}))^t}\right| d\sigma_\beta(z)$$

und

$$
\begin{aligned}
J(w) &= \sum_{k,l} \int_{D_{k,l}} |f(z)| \left| \frac{1}{(1-(w|z))^t} - \frac{1}{(1-(w|z_{k,l}))^t} \right| d\sigma_\beta(z) \\
&= \sum_{k,l} \frac{1}{|1-(w|z_{k,l})|^t} \int_{D_n} |f(z)| \left| \frac{(1-(w|z_{k,l}))^t}{(1-(w|z))^t} - 1 \right| d\sigma_\beta(z).
\end{aligned}
$$

Wir schätzen zuerst $I(w)$ ab. Aus dem Mittelwertsatz folgt für jedes $f \in \mathcal{H}(U_N)$ und alle $w, \tilde{w} \in U_N$ mit $\beta(w, \tilde{w}) < r$

$$
\begin{aligned}
|f(w) - f(\tilde{w})| &\leq \int_0^1 \sum_{m=1}^N |(w_m - \tilde{w}_m)| \, |\frac{\partial f}{\partial w_m} f(tw + (1-t)\tilde{w})| dt \\
&\leq \|w - \tilde{w}\| \sup_{z \in B_r(w)} \|\nabla f(z)\|.
\end{aligned}
$$

Für jede Wahl von $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq l \leq l_k$ erhalten wir mit 3.5.5 für jedes $z \in D_{k,l}$

$$
\begin{aligned}
|f(z) - f(z_{k,l})| &\leq \|z - z_{k,l}\| \sup_{z \in B_r(z_{k,l})} \|\nabla f(z)\| \leq c_R r \left(\int_{B_R(z_{k,l})} |f(z)|^p d\Lambda_N(z) \right)^{1/p} \\
&\leq c_R r \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\Lambda_N(z) \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Durch Integration über $D_{k,l}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_{D_{k,l}} \left| \frac{f(z) - f(z_{k,l})}{(1-(w|z_{k,l}))^t} \right| d\sigma_\beta(z) &\leq c_R \frac{(1 - \|w_k\|^2)^t}{|1-(w|w_k)|^t} \int_{D_{k,l}} |f(z) - f(z_{k,l})| d\Lambda_N(z) \\
&\leq c_R r \frac{\Lambda_N(D_{k,l})(1 - \|w_k\|^2)^t}{|1-(w|w_k)|^t v(w_k)^{1/p}} \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z) \right)^{1/p} \\
&\leq c_R r^{2N+1} \frac{(1 - \|w_k\|^2)^t}{|1-(w|w_k)|^t v(w_k)^{1/p}} \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z) \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Gemäss 2.3.1 existiert eine Konstante $c > 0$ mit $l_k \leq \frac{c}{r^{2N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Durch Summation folgt

$$
\begin{aligned}
I(w) &\leq c_R \sum_{k=1}^\infty \sum_{l=1}^{l_k} r^{2N+1} \frac{(1 - \|w_k\|^2)^t}{|1-(w|w_k)|^t v(w_k)^{1/p}} \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z) \right)^{1/p} \\
&\leq c c_R r \sum_{k=1} \frac{(1 - \|w_k\|^2)^t}{|1-(w|w_k)|^t v(w_k)^{1/p}} \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z) \right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Andererseits haben wir für $1 \le k < \infty$ und $1 \le l \le l_k$

$$\begin{aligned}\int_{D_{k,l}} |f(z)| \left|\frac{(1-(w|z_{k,l}))^t}{(1-(w|z))^t} - 1\right| d\sigma_\beta(z) &\overset{2.2.2(iii)}{\le} c_{R,t} r \int_{D_{k,l}} |f(z)|(1-\|z\|^2)^t d\Lambda_N(z)\\ &\le c_R r(1-\|w_k\|^2)^t \int_{D_{k,l}} |f(z)| d\Lambda_N(z)\\ &\le c_R r \frac{(1-\|w_{k,l}\|^2)^t}{v(w_k)^{1/p}} \Lambda_N(D_{k,l}) \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^{1/p}\\ &\le c_R r^{2N+1} \frac{(1-\|w_k\|^2)^t}{v(w_k)^{1/p}} \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^{1/p}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}J(z) &\le c_R \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k} r^{2N+1} \frac{(1-\|w_k\|^2)^t}{|1-(w|w_k)|^t v(w_k)^{1/p}} \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^{1/p}\\ &\le r c_R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\|w_k\|^2)^t}{|1-(w|w_k)|^t v(w_k)^{1/p}} \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Aus (3.12), (3.13) und (3.14) folgt die Behauptung. ■

Beweis von 3.5.2. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem Beweis von 3.5.6. Sei zuerst $0 < p < \infty$. Dann gilt für $f \in \mathcal{A}_v^p$ mit 3.5.1

$$\begin{aligned}&\int_{U_N} |f(w) - Sf(w)|^p d\sigma_v(w)\\ &\le c_R^p r^p \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\|w_k\|)^t}{|1-(w|w_k)|^t v(w_k)^{1/p}} \left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^{1/p} \right\|_{p,v}^p\\ &= c_R^p r^p \left\| T_{v,t}^{(p)}\left(\left(\left(\int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^{1/p}\right)_k\right) \right\|_{p,v}^p\\ &\le c_R^p r^p \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2R}(w_k)} |f(z)|^p d\sigma_v(z) \le c_R^p r^p \int_{U_N} |f(z)|^p d\sigma_v(z).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Für genügend kleine r ist $\left\| Id_{\mathcal{A}_v^p} - T_{v,t}^{(p)} R_v \right\| < 1$.

Für $p = \infty$ wird wegen

$$\sup_{k,l} |f(z_{k,l})| \frac{\sigma_\beta(D_{k,l})}{(1-\|z_{k,l}\|)^t} \le \|f\|_{v,\infty} \sup_{k,l} \frac{\sigma_\beta(B_r(z_{k,l}))}{(1-\|z_{k,l}\|)^t} \le c_r \|f\|_{v,\infty}$$

durch

$$\widetilde{R_v} : X_v \to l^\infty : f \mapsto \left(f(z_{k,l}) \frac{\sigma_\beta(D_{k,l})}{(1-\|z_{k,l}\|)^t} \right)_{k,l}$$

ein beschränkter Operator definiert. Wegen

$$T_{v,t}^{(\infty)} \widetilde{R_v} = (T_{v_{1,s},t}^{(1)} R_v)^*$$

sind wir fertig. ∎

Wir fügen einige Folgerungen für den Fall der Standardgewichte v_α an.

In [Sha76] wird gezeigt, dass für $N=1$ die Mackey-Topologie von $\mathcal{A}^p_\alpha$ ($-1<\alpha<\infty$, $0<p<1$) durch die Norm von $\mathcal{A}^1_\sigma$ mit $\sigma=(\alpha+2)/p-2$ induziert wird. Dabei ist die Mackey-Topologie die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{A}^p_\alpha$, welche denselben Dualraum wie $[\mathcal{A}^p_\alpha, \|\cdot\|_{\alpha,p}]$ liefert. Mit Hilfe von 3.5.2 können wir das leicht auch für beliebige $N\geq 1$ beweisen. Konkret haben wir

Satz 3.5.7. *Seien $\alpha>-1$, $0<p<1$ und $\sigma=(\alpha+N+1)/p-N-1$. Dann haben wir $\mathcal{A}^p_\alpha\subset\mathcal{A}^1_\sigma$, und die Mackey-Topologie von $\mathcal{A}^p_\alpha$ wird durch die Norm von $\mathcal{A}^1_\sigma$ induziert.*

Beweis. Wie wir später sehen werden, bettet $\mathcal{A}^p_\alpha$ stetig in $\mathcal{A}^1_\sigma$ ein. Wie in [Sha76], Beweis von Theorem 3, bleibt zu zeigen, dass eine beschränkte Menge $A\subset\mathcal{A}^p_\alpha$ existiert, so dass jedes $f\in\mathcal{A}^p_\alpha$ mit $\|f\|_{\sigma,1}\leq 1$ im $\mathcal{A}^p_\alpha$-Abschluss der absolutkonvexen Hülle von A liegt. Sei also ein $f\in\mathcal{A}^p_\alpha$ mit $\|f\|_{\sigma,1}\leq 1$ gewählt. Wegen 3.5.2 existieren eine von f unabhängige Konstante $c>0$ und eine Folge $(a_n)_n\in B_{l^1}$, so dass im Sinne der Norm von $\mathcal{A}^1_\sigma$

$$f = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n k_{\sigma,1,z_n} = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n k_{\alpha,p,z_n}$$

gilt. Die Folge der Partialsummen liegt in der absolutkonvexen Hülle der in $\mathcal{A}^p_\alpha$ beschränkten Menge $A=\{c k_{\alpha,p,z} : z\in U_N\}$. Sie konvergiert punktweise gegen f und ist in $\mathcal{A}^p_\alpha$ beschränkt. Mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgt, dass die Reihe auch in $\mathcal{A}^p_\alpha$ konvergiert, und wir sind fertig. ∎

Aus 3.5.2 folgt sofort

Korollar 3.5.8. (i) *Für jedes $\alpha>-1$ und jedes $0<p\leq 1$ existiert eine Folge $(z_n)_n$ in U_N, so dass jedes $f\in\mathcal{A}^p_\alpha$ eine Darstellung der Form*

$$f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(1-\|z_n\|^2)^{(\alpha+N+1)/p}}{(1-(w\mid z_n))^{2(\alpha+N+1)/p}}$$

mit einer Folge $(a_n)_n\in l^p$ besitzt.

(ii) *Für jedes $\alpha>-1$ und $1<p<\infty$ existiert eine Folge $(z_n)_n$ in U_N, so dass jedes $f\in\mathcal{A}^p_\alpha$ eine Darstellung der Form*

$$f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(1-\|z_n\|^2)^{(\alpha+N+1)/p^*}}{(1-(w\mid z_n))^{\alpha+N+1}}$$

mit einer Folge $(a_n)_n\in l^p$ besitzt.

Dieses Resultat erlaubt es, in gewissen Fällen die Bergman-Räume $\mathcal{A}^p_v$ durch Teilräume zu ersetzen, die isomorph zu einem Quotienten von l^p sind. Für den Spezialfall $N=1$ vergleiche [DJR99].

Nach 3.5.8(i) ist $T^{(p)}_{v_\alpha,2(\alpha+N+1)}$ für $0<p\leq 1$ surjektiv; jedes $f\in\mathcal{A}^p_\alpha$ hat folglich eine Darstellung der Form

$$f(w)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k k_{\alpha,p,z_n}(w)\quad (w\in U_N), \tag{3.16}$$

mit Folgen $(z_n)_n$ in U_N und $(a_n)_n\in l^p$.

Für $0<r\leq p<\infty$ und $-1\leq\alpha<\infty$ bilden wir den Raum

$$\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$$

der Funktionen $f\in\mathcal{A}^p_\alpha$, welche eine Darstellung (3.16) mit Folgen $(a_n)_n$ in l^r und $(z_n)_n$ in U_N zulassen.

3.5.8(i) besagt nun für $\alpha>-1$, dass

$$\mathcal{A}^p_\alpha\simeq\mathcal{A}^{(p,p)}_\alpha\quad (0<p\leq 1) \tag{3.17}$$

gilt.

Man rechnet leicht nach, dass $\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$ unter

$$\|f\|_{\alpha,p,r}:=\inf\left\{(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^r)^{1/r}:(3.16)\text{ gilt}\right\}$$

ein $\min\{r,1\}$-normierter Raum ist. Weiter ist die Abbildung

$$u:l^r(U_N)\longrightarrow\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha:(a_z)_{z\in U_N}\mapsto\sum_{z\in U_N}a_z k_{\alpha,p,z}$$

surjektiv und stetig mit Norm 1. Somit ist $\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$ isometrisch isomorph zum Quotienten $l^r(U_N)/u^{-1}(0)$. Insbesondere haben wir es mit einem $\min\{r,1\}$-Banach-Raum zu tun.

Direkt aus der Definition folgt

$$\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha=\mathcal{A}^{(q,r)}_\beta\quad (0<r\leq p,q<\infty)$$

falls $(\alpha+N+1)/p=(\beta+N+1)/q$.

Satz 3.5.9. *Für $r\leq\min\{1,p\}$ bettet $\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$ stetig mit Norm 1 in $\mathcal{A}^p_\alpha$ ein.*

Beweis. Sei $f\in\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$ mit einer Darstellung (3.16). Dann haben wir im Falle $r\leq p<1$

$$\begin{aligned}\|f\|^p_{\alpha,p}&=\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n k_{\alpha,p,z_n}\|^p_{\alpha,p}\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\|k_{\alpha,p,z_n}\|^p_{\alpha,p}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^r\right)^{p/r}.\end{aligned}$$

Im Fall $p \geq 1$ und $r \leq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f\|_{\alpha,p} &= \|\sum_{n=1}^{\infty} a_n k_{\alpha,p,z_n}\|_{\alpha,p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|k_{\alpha,p,z_n}\|_{\alpha,p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

In beiden Fällen ergibt sich die Behauptung, wenn wir das Infimum über alle Darstellungen (3.16) von f bilden. ■

4. Carleson-Masse

4.1. Grundbegriffe

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem vorigen Kapitel. Alle Masse μ auf U_N sind weiterhin positive endliche Borel-Masse. Wir lassen aber die Forderung fallen, dass $\mu(O)>0$ für alle nichtleeren offenen Teilmengen $O\subset U_N$ gelten soll.

Seien v eine Gewichtsfunktion und $0<p,q<\infty$. Ein Mass μ auf U_N heisst $\boldsymbol{(v,p,q)}$**-Carleson-Mass** oder $\boldsymbol{q}$**-Carleson-Mass für** $\boldsymbol{\mathcal{A}_v^p}$, falls durch $f\mapsto f$ ein beschränkter Operator

$$I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$$

definiert wird. Es soll also eine Konstante $c>0$ existieren, so dass

$$\|f\|_{q,\mu}\le c\;\|f\|_{v,p} \tag{4.1}$$

für alle $f\in\mathcal{A}_v^p$ gilt. Obwohl I im Allgemeinen nicht injektiv ist, sprechen wir im Folgenden von **Carleson-Einbettungen**. Zur Abkürzung schreiben wir oft auch

$$I\in\mathcal{L}(\mathcal{A}_v^p,L^q(\mu)),$$

falls μ ein (v,p,q)-Carleson-Mass ist.

Im Fall $v=v_\alpha$ $(\alpha>-1)$ verwenden wir auch die Bezeichnung $\boldsymbol{(\alpha,p,q)}$**-Carleson-Mass**. Unter einem $\boldsymbol{(-1,p,q)}$**-Carleson-Mass** verstehen wir ein positives Mass μ auf U_N, so dass

$$I:H^p\to L^q(\mu):f\mapsto f$$

als beschränkter Operator existiert.

Für ein Mass μ auf U_N sei

$$\mu=\mu_s+f d\Lambda_N,$$

seine Lebesgue-Zerlegung, wobei μ_s zu Λ_N singulär und $f\in L^1(\Lambda_N)$ sind. Weiter seien v eine beliebige Gewichtsfunktion auf U_N und $0<p,q<\infty$. Wir haben

$$\max\left\{\left(\int_{U_N}|g|^q d\mu_s\right)^{1/q},\left(\int_{U_N}|g|^q f d\Lambda_N\right)^{1/q}\right\}\le\left(\int_{U_N}|g|^q d\mu\right)^{1/q}\le c\left(\int_{U_N}|g|^p d\sigma_v\right)^{1/p}$$

für alle $g\in\mathcal{A}_v^p$, so dass mit μ auch μ_s und $f d\Lambda_N$ (v,p,q)-Carleson-Masse sind. Umgekehrt ist mit μ_s und $f d\Lambda_N$ auch μ ein (v,p,q)-Carleson-Mass, denn wir haben für alle $g\in\mathcal{A}_v^p$

$$\begin{aligned}\left(\int_{U_N}|g|^q d\mu\right)^{1/q}&\le 2^{1/q}\left[\left(\int_{U_N}|g|^q d\mu_s\right)^{1/q}+\left(\int_{U_N}|g|^q f d\Lambda_N\right)^{1/q}\right]\\&=2^{(1/q)+1}c\left(\int_{U_N}|g|^p d\sigma_v\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Unter den singulären Massen spielen die diskreten Carleson-Masse eine spezielle Rolle. Sei μ ein solches Mass auf U_N. Dann existieren eine endliche oder unendliche Folge

$z=(z_n)_n$ in U_N und eine Folge $a=(a_n)_n$ in l^1 mit $a_n \neq 0$ für jedes n und

$$\mu = \sum_n a_n \delta_{z_n}.$$

Man rechnet leicht nach, dass μ genau dann ein (v,p,q)-Carleson-Mass ist, wenn der **gewichtete Restriktions-Operator**

$$R_{a,z}^q : \mathcal{A}_v^p \to l^q : f \mapsto (a_n^{1/q} f(z_n))_n$$

wohldefiniert und beschränkt ist.

Absolutstetige Carleson-Masse gehören zu Multiplikationsoperatoren. Ist nämlich

$$\mu = h d\Lambda_N \quad (0 \leq h \in L^1(\Lambda_N))$$

ein bezüglich Λ_N absolutstetiges Mass, so ist

$$M_{h^{1/q}} : \mathcal{H}(U_N) \to L^0(\Lambda_N) : f \mapsto h^{1/q} \cdot f$$

wohldefiniert und linear. Genau dann ist μ ein (v,p,q)-Carleson-Mass, wenn $M_{h^{1/q}}$ sogar einen beschränkten Operator

$$M_{h^{1/q}} : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\Lambda_N)$$

induziert.

Kompositionsoperatoren liefern eine weitere Klasse von Carleson-Massen. Für eine analytische Funktion $\varphi : U_N \to U_N$ ist der **Kompositionsoperator** (zum Symbol φ)

$$C_\varphi : \mathcal{H}(U_N) \to \mathcal{H}(U_N) : f \mapsto f \circ \varphi$$

linear und stetig. Für ein Mass μ auf U_N definieren wir das Mass

$$\mu_\varphi := \mu \circ \varphi^{-1}.$$

Wegen

$$\int_{U_N} |f \circ \varphi|^p d\mu = \int_{U_N} |f|^p d\mu_\varphi$$

ist für $0 < p,q < \infty$ der Kompositionsoperator

$$C_\varphi : \mathcal{A}_v^p \to \mathcal{A}_\mu^q : f \mapsto f \circ \varphi$$

genau dann wohldefiniert und beschränkt, wenn μ_φ ein (v,p,q)-Carleson-Mass ist.

Wir sind speziell am Fall $\mu = w\sigma_N$ für eine Gewichtsfunktion w interessiert. Für konstante φ ist $\sigma_{w,\varphi}$ ein diskretes Mass. Andererseits sind Masse $\sigma_{w,\varphi}$ zu nicht konstanten Symbolen φ bezüglich σ_N absolutstetig. Wir verwenden ein klassisches Argument. Für eine nichtkonstante, analytische Funktion $\varphi : U_N \to U_N$ ist

$$Z := \{z \in U_N : \varphi'(z) = 0\}$$

abzählbar, also eine σ_N-Nullmenge, und $G := U_N \setminus Z$ ist offen in U_N. Für jedes $z \in G$ existiert ein $r_z > 0$, so dass $\varphi_z := \varphi|_{B_{r_z}(z)}$ injektiv ist. Weiter haben wir

$$G = \bigcup_{z \in U_N} B_{r_z}(z),$$

und offenbar existiert sogar eine Folge $(z_n)_n$ in G, so dass

$$G = \bigcup_n B_n,$$

wobei wir zur Vereinfachung der Notation $B_n := B_{r_{z_n}}(z_n)$ setzen. Wir bilden rekursiv $\Omega_1 := B_1$ und weiter $\Omega_{n+1} := B_{n+1} \setminus \overline{\bigcup_{k=1}^n \Omega_k}$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie damit $\Omega := \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$. Die Ω_n sind paarweise disjunkt, und es gilt $\sigma_N(U_N \setminus \Omega) = 0$. Für jede messbare Menge $M \subset U_N$ haben wir

$$\begin{aligned}
\sigma_{w,\varphi}(M) &= \int_M d\sigma_{w,\varphi} = \int_{\varphi^{-1}(M)} w d\sigma_N = \int_{\varphi^{-1}(M)\cap\Omega} w d\sigma_N = \sum_{n=1}^\infty \int_{\varphi^{-1}(M)\cap\Omega_n} w d\sigma_N \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_{\varphi_n^{-1}(M)\cap\Omega_n} w d\sigma_N = \sum_{n=1}^\infty \int_{M\cap\varphi(\Omega_n)} w(\varphi_n^{-1}(z))|J\varphi_n^{-1}(z)|^2 d\sigma_N(z) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_M 1_{\varphi(\Omega_n)}(z) w(\varphi_n^{-1}(z)) \frac{1}{|J\varphi_n(\varphi_n^{-1}(z))|^2} d\sigma_N(z) \\
&= \int_M \sum_{n=1}^\infty 1_{\varphi(\Omega_n)}(z) w(\varphi_n^{-1}(z)) \frac{1}{|J\varphi_n(\varphi_n^{-1}(z))|^2} d\sigma_N(z).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Für $z \in \varphi(U_N)$ sei

$$W_{\varphi,w}(z) = \sum_j \frac{1}{|J\varphi(z_j)|^2} w(z_j),$$

wobei $(z_j)_j$ die endliche oder unendliche Folge der Punkte in $\varphi^{-1}(z)$ mit $J\varphi(z_j) \neq 0$ ist. Dies ergänzen wir durch $W_{\varphi,w}(z) := 0$ für $z \in U_N \setminus \varphi(U_N)$. Mit (4.2) erhalten wir

$$\sigma_{w,\varphi}(M) = \int_{U_N} W_{\varphi,w}(z) d\sigma_N(z);$$

im Bergman-Raum-Fall ist das Mass $\sigma_{w,\varphi}$ also absolutstetig bezüglich σ_N, und $W_{\varphi,w}$ ist seine Dichte. In diesem Fall „sind“ Kompositionsoperatoren also auch Multiplikationsoperatoren. Da es aber im Allgemeinen schwierig ist, die Dichten $W_{\varphi,w}$ zu einem Symbol φ effektiv zu berechnen, ist dieses Resultat nur von beschränktem Nutzen. Deshalb werden wir im Folgenden Kompositionsoperatoren gesondert behandeln.

Kompositionsoperatoren und Multiplikationsoperatoren sind Spezialfälle von **gewichteten Kompositionsoperatoren**, d.h von Operatoren der Form

$$uC_\varphi : \mathcal{H}(U_N) \to L^0(\Lambda_N) : f \mapsto u \cdot (f \circ \varphi)$$

mit einer messbaren Funktion $u : U_N \to \mathbb{C}$ und einer analytischen Funktion $\varphi : U_N \to U_N$. Offensichtlich ist uC_φ wohldefiniert und linear. Mit $u = 1$ erhalten wir die Kompositionsoperatoren, mit $\varphi = \mathrm{id}_{U_N}$ die Multiplikationsoperatoren. Eine leichte Rechnung zeigt, dass $uC_\varphi : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ genau dann wohldefiniert ist, wenn $(|h|^q d\mu) \circ \varphi^{-1}$ ein (v,p,q)-Carleson-Mass ist.

Gewichtete Kompositionsoperatoren erscheinen in natürlicher Weise bei der Untersuchung von Kompositionsoperatoren auf Gebieten $G \subset \mathbb{C}^N$, die **konform äquivalent** zu U_N sind, d.h. es soll eine biholomorphe Abbildung $\tau : U_N \to G$ existieren. Für $N = 1$ handelt es sich genau um die einfach zusammenhängenden Gebiete $G \subsetneq \mathbb{C}$. Dies ist falsch für $N\geq 2$. Zum Beispiel existiert keine analytische Bijektion vom Einheitsball U_N auf das Produkt U_1^N (Polydisc). Andererseits existieren solche Abbildungen für Gebiete $G\subset\mathbb{C}^N$ mit C^2-Rand, welche eine transitive Automorphismengruppe besitzen, ferner für strikt pseudokonvexe Gebiete $G\subset\mathbb{C}^N$ mit nichtkompakter Automorphismengruppe. Vgl. dazu [Kra82] 10.2.18.1/10.2.18.2.

Wir skizzieren im Folgenden, wie Fragestellungen über Kompositionsoperatoren auf zu U_N konform äquivalenten Gebieten auf solche über gewichtete Kompositionsoperatoren auf U_N zurückgeführt werden können. Vergleiche dazu für $N=1$ [SS03]. Für ähnliche Überlegungen im Zusammenhang mit Multiplikationsoperatoren vgl. [Vuk99]. Sei $\mathcal{A}^p(G)=\{f\in L^p(\sigma_G): f \text{ analytisch}\}$. Dabei bezeichnet σ_G die Einschränkung des normalisierten Lebesgue-Masses ($\sigma_N(U_N)=1$) auf die Borel-Mengen von G. Mit dem Transformationssatz 2.1.2 sieht man, dass durch

$$V_p:\mathcal{A}^p(G)\to\mathcal{A}_0^p: f\mapsto (J\tau)^{2/p}\cdot f\circ\tau$$

ein isometrischer Isomorphismus mit der Inversen

$$V_p^{-1}:\mathcal{A}_0^p\to\mathcal{A}^p(G): f\mapsto \frac{1}{((J\tau)\circ\tau^{-1})^{2/p}}f\circ\tau^{-1}$$

definiert wird.

Sei $\varphi: G\to G$ eine analytische Abbildung. Falls für $0<p,q<\infty$

$$C_\varphi:\mathcal{A}^p(G)\to\mathcal{A}^q(G): f\mapsto f\circ\varphi$$

als beschränkter Operator existiert, so ist auch

$$V_qC_\varphi V_p^{-1}:\mathcal{A}_0^p\to\mathcal{A}_0^q$$

definiert und beschränkt. Für $f\in\mathcal{A}_0^p$ erhalten wir

$$V_qC_\varphi V_p^{-1}f=\frac{1}{((J\tau)\circ\tau^{-1}\circ\varphi\circ\tau)^{2/p}}(J\tau)^{2/q}\cdot(f\circ\tau^{-1}\circ\varphi\circ\tau).$$

Dies ist ein gewichteter Kompositionsoperator uC_ψ mit

$$u=\frac{1}{((J\tau)\circ\tau^{-1}\circ\varphi\circ\tau)^{2/p}}(J\tau)^{2/q},\qquad \psi=\tau^{-1}\circ\varphi\circ\tau.$$

Für Fragen über Carleson-Masse auf zu U_N konform äquivalenten Gebieten G modifizieren wir diese Überlegungen. Die Gruppe

$$\mathrm{Aut}(G)$$

der Automorphismen von G besteht aus den Abbildungen der Form $\psi=\tau\circ\varphi\circ\tau^{-1}$ mit $\varphi\in\mathrm{Aut}(U_N)$. Durch

$$\Lambda_G(A):=\Lambda_N(\tau^{-1}(A))$$

erhalten wir ein positives Mass auf G, das unter $\mathrm{Aut}(G)$ invariant ist und das nicht von der Wahl von τ abhängt. Die **Bergman-Metrik** auf G ist durch

$$\beta_G(w,z):=\beta(\tau^{-1}(w),\tau^{-1}(z))\quad w,z\in G$$

definiert (vgl. [Pom92] für $N=1$). Auch diese ist von τ unabhängig. Für $z\in G$ und $r>0$ bezeichnen wir mit

$$B_r^G(z):=\{w\in G:\beta_G(w,z)<r\}$$

die offenen Bälle bezüglich der Bergman-Metrik auf G.

Für ein Mass μ auf G wird durch

$$\mu_\tau(A) := \mu(\tau^{-1}(A))$$

ein Mass auf U_N definiert. Dieses hängt zwar von der Wahl der analytischen Bijektion τ ab, was aber für unsere Zwecke unerheblich ist. Ist nämlich $\tau_0 : U_N \to G$ eine weitere analytische Bijektion, so wird für $0 < p < \infty$ durch

$$L^p(\mu_\tau) \to L^p(\mu_{\tau_0}) : f \mapsto f \circ \tau^{-1} \circ \tau_0$$

ein isometrischer Isomorphismus definiert. Leicht verifizert man

$$f \in L^p(\mu) \Leftrightarrow f \circ \tau \in L^p(\mu_\tau).$$

Ist $v : G \to]0, \infty[$ eine messbare Funktion, so definieren wir durch

$$d\sigma_v^G := v d\Lambda_G$$

ein Mass auf G. Mit $v_\tau := v \circ \tau$ gilt offensichtlich

$$\sigma_{v_\tau} = (\sigma_v^G)_\tau.$$

Analog zur Situation beim Einheitsball definieren wir den Bergman-Raum zum Mass μ auf G durch

$$\mathcal{A}_\mu^p(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \text{ analytisch}, f \in L^p(\mu)\}$$

für $0 < p < \infty$. Im Falle $\mu = \sigma_v^G$ schreiben wir

$$\mathcal{A}_v^p(G) := \mathcal{A}_\mu^p(G).$$

Mit diesen Bezeichnungen haben wir

Satz 4.1.1. *Durch $f \mapsto f \circ \tau$ werden isometrische Isomorphismen*

$$S_\tau : L^p(\mu) \to L^p(\mu_\tau) \tag{4.3}$$

$$\widehat{S}_\tau : \mathcal{A}_\mu^p(G) \to \mathcal{A}_{\mu_\tau}^p \tag{4.4}$$

$$\widehat{S}_\tau : \mathcal{A}_v^p(G) \to \mathcal{A}_{v_\tau}^p \tag{4.5}$$

definiert.

Insbesondere ist $\mathcal{A}_\mu^p(G)$ bzw. $\mathcal{A}_v^p(G)$ genau dann ein (p-)Banach-Raum, wenn $\mathcal{A}_{\mu_\tau}^p$ bzw. $\mathcal{A}_{v_\tau}^p$ vollständig ist.

Die obigen Identifikationen erlauben es uns, Resultate über Carleson-Masse auf U_N auch für Masse auf G anzuwenden. Seien $v : G \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion mit $v(z) > 0$ für jedes $z \in G$ und $0 < p, q < \infty$. Ein Mass μ auf G heisst (v, p, q)-Carleson-Mass, falls

$$I : \mathcal{A}_v^p(G) \to L^q(\mu) : f \mapsto f \tag{4.6}$$

wohldefiniert und beschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$S_\tau \circ I \circ \widehat{S}_\tau^{-1} f = f,$$

so dass auch die Einbettung

$$\widetilde{I} : \mathcal{A}_{v_\tau}^p \to L^q(\mu_\tau) : f \to f \tag{4.7}$$

wohldefiniert und beschränkt ist. Wird andererseits durch (4.7) ein beschränkter Operator definiert, so sieht man analog, dass auch der Operator (4.6) wohldefiniert und beschränkt ist.

Die auf U_N zurückgezogenen Gewichte v_τ erfüllen im Allgemeinen keine der in Kapitel 2 eingeführten Bedingungen. In wichtigen Fällen existieren aber eine injektive, analytische Funktion $\varphi : U_N \to \mathbb{C}$ ohne Nullstellen und eine D-Gewichtsfunktion $\widetilde{v} : U_N \to \mathbb{R}$, so dass gilt

$$v_\tau = v \circ \tau = |\varphi|\widetilde{v}. \tag{4.8}$$

Für ein Mass μ auf U_N definieren wir in dieser Situation das Mass $\mu^\varphi := |\varphi| d\mu$ beziehungsweise die Gewichtsfunktionen $\widetilde{v}^\varphi := \widetilde{v}|\varphi|$. Offensichtlich gilt $(\sigma_{\widetilde{v}})^\varphi = \sigma_{\widetilde{v}^\varphi}$. Für $0 < p < \infty$ und jedes $f \in L^p(\mu)$ haben wir

$$\int_{U_N} |f\varphi^{1/p}|^p d\mu = \int_{U_N} |f|^p |\varphi| d\mu = \|f\|^p_{\mu^\varphi, p}\,.$$

Durch

$$M_{\varphi^{1/p}} : L^p(\mu^\varphi) \to L^p(\mu) : f \mapsto f \cdot \varphi^{1/p}$$

wird also ein isometrischer Isomorphismus definiert. Der inverse Operator ist $M_{\varphi^{-1/p}}$. Da mit f auch $f \cdot \varphi^{1/p}$ analytisch ist, induziert $M_{\varphi^{1/p}}$ einen isometrischen Isomorphismus

$$\widehat{M}_{\varphi^{1/p}} : \mathcal{A}^p_{\widetilde{v}^\varphi} \to \mathcal{A}^p_{\widetilde{v}}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{A}^p_{\widetilde{v}^\varphi}$ genau dann ein Banach-Raum, wenn dies für $\mathcal{A}^p_{\widetilde{v}}$ gilt.

Seien μ, $\widetilde{v}$, φ, p, q so gewählt, dass die Carleson-Einbettung

$$\widehat{I} : \mathcal{A}^p_{\widetilde{v}} \to L^q(\mu^\psi) : f \mapsto f \tag{4.9}$$

mit $\psi = \varphi^{-q/p}$ existiert. Wegen

$$M_{\psi^{1/q}}\, \widehat{I}\, \widehat{M}_{\varphi^{1/p}} f = f \quad \forall f \in \mathcal{A}^p_{\widetilde{v}^\varphi}$$

ist dann auch

$$I : \mathcal{A}^p_{\widetilde{v}^\varphi} \to L^q(\mu) \tag{4.10}$$

wohldefiniert und beschränkt. Sind andererseits die Parameter so gewählt, dass (4.10) als beschränkter Operator existiert, so folgt aus

$$\widehat{I} = M^{-1}_{\psi^{1/q}} I \widehat{M}^{-1}_{\varphi^{-1/p}},$$

dass auch der Operator in (4.9) wohldefiniert und beschränkt ist.

Neben den Bergman-Räumen mit Gewichten bezüglich des invarianten Masses Λ_N sind wir auch an Bergman-Räumen mit Gewichten bezüglich des normalisierten Lebesgue-Masses σ_N interessiert. Mit dem Transformationssatz 2.1.2 erhalten wir für eine Borel-messbare Menge $B \subset G$

$$\begin{aligned}\sigma_N(B) &= \int_{\tau(\tau^{-1}(B))} d\sigma_N = \int_{\tau^{-1}(B)} J_{\mathbb{R}}\tau(z)d\sigma_N(z) = \int_{\tau^{-1}(B)} |J\tau(z)|^2 d\sigma_N(z)\\ &= \int_{\tau^{-1}(B)} |J\tau(z)|^2(1-\|z\|^2)^{N+1}d\Lambda_N(z)\\ &= \int_B |J\tau(\tau^{-1}(z))|^2(1-\|\tau^{-1}(z)\|^2)^{N+1}d\Lambda_G(z)\\ &= \int_B |J\tau^{-1}(z)|^{-2}(1-\|\tau^{-1}(z)\|^2)^{N+1}d\Lambda_G(z).\end{aligned}$$

Das normalisierte Lebesgue-Mass σ_N ist also bezüglich des invarianten Masses absolutstetig, und es gilt

$$d\sigma_N = |J\tau^{-1}(\,\cdot\,)|^{-2}(1-\|\tau^{-1}(\,\cdot\,)\|^2)^{N+1}d\Lambda_G.$$

Ist v eine Gewichtsfunktion auf G, so gilt

$$\begin{aligned}(vd\sigma_N)_\tau &= (v(\cdot)|J\tau^{-1}(\cdot)|^{-2}(1-\|\tau^{-1}(\cdot)\|^2)^{N+1}d\Lambda_G)_\tau\\ &= |(v\circ\tau)J\tau^{-1}(\tau(\cdot))|^{-2}(1-\|\tau^{-1}\circ\tau\|^2)^{N+1}d\Lambda_N\\ &= |(v\circ\tau)J\tau(\cdot)|^2(1-\|\cdot\|^2)^{N+1}d\Lambda_N.\end{aligned}$$

$(vd\sigma_N)_\tau$ besitzt also bezüglich Λ_N eine Dichte der Form (4.8) mit $\varphi = |J\tau|^2$ und $\widetilde{v} = (v\circ\tau)(1-\|\cdot\|^2)^{N+1}$.

Eine mögliche Verallgemeinerung der Standardgewichte auf zu U_N konform äquivalente Gebiete bilden die für $\alpha > -1$ definierten Gewichte

$$v_\alpha^G(z) := \operatorname{dist}(z, \partial G)^\alpha.$$

Dabei bezeichnet für ein $z \in \mathbb{C}^N$ und $A \subset \mathbb{C}^N$

$$\operatorname{dist}(z, A) := \inf\{\|z-w\| : w \in A\}$$

wie üblich den Abstand von z zu A. Offensichtlich ist $v_\alpha^G(z) > 0$ für jedes $z \in G$.

Bemerkung 4.1.2. Für $N=1$ und einfach zusammenhängendes $G \subsetneq \mathbb{C}$ können die auf U_1 zurückgezogenen Gewichte mit den Standardgewichten auf U_1 verglichen werden. Ein Satz von Koebe (vgl. [Pom92] 1.4) besagt, dass für jede analytische Funktion $\tau : U_1 \to G$

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|\tau'(z)| \leq \operatorname{dist}(\tau(z), \partial\tau(U_1)) \leq (1-|z|^2)|\tau'(z)|$$

gilt. $(v_\alpha^G)_\tau = \operatorname{dist}(\tau(z), \partial\tau(U_1))^\alpha$ erzeugt also den gleichen Bergman-Raum wie $v_\alpha|\tau'|$. Diese Gewichte sind wiederum von der Form (4.8). Wir können also unsere Resultate auch in dieser Situation anwenden.

4.2. Carleson-Einbettungen für Bergman-Räume

Wir betrachten in diesem Kapitel q-Carleson-Masse für gewichtete Bergman-Räume $\mathcal{A}_v^p$ $(0 < p, q < \infty)$. Dabei beschränken wir uns auf D-Gewichte v. Die Resultate für Carleson-Einbettungen $I : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ unterscheiden sich wesentlich in den Fällen $p \leq q$ und $p > q$.

Der Fall $p \leq q$

Für den Spezialfall der Standardgewichte σ_α sind die nachfolgenden Resultate mehrheitlich bekannt. In [OP74] wird der Fall $N = 1$ und $p \leq q$ behandelt. Hastings [Has75] (für $\alpha = 0$, $p \leq q$) und [CW82] ($\alpha = 0$, $p = q = 2$) verallgemeinern diese Resultate auf den Fall mehrerer Variablen. Der folgende Beweis für die Charakterisierung der Carleson-Masse für D-Gewichte geht zurück auf Ideen aus [Lue83], wo allerdings nur der Fall der Standardgewichte behandelt wird.

Satz 4.2.1. *Seien $s > N$, v eine Gewichtsfunktion mit der Eigenschaft D, μ ein Mass auf U_N, $0 < p, q, r < \infty$ mit $p \leq q$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\left(\int_{U_N} |f|^q d\mu\right)^{1/q} \leq c \left(\int_{U_N} |f|^p d\sigma_v\right)^{1/p} \quad \forall f \in \mathcal{A}_v^p.$

(ii) *Zu jedem r-Verband $(z_n)_n$ existiert eine Konstante $c_r > 0$, so dass gilt:*
$$\sup_n \frac{\mu(B_r(z_n))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(z_n))^{1/p}} \leq c_r.$$

(iii) *Es gibt einen r-Verband $(z_n)_n$, so dass*
$$\sup_n \frac{\mu(B_r(z_n))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(z_n))^{1/p}} < \infty.$$

(iv) *Es existiert ein $c_r > 0$, so dass für jedes $w \in U_N$ gilt:*
$$\frac{\mu(B_r(w))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(w))^{1/p}} \leq c_r.$$

(v) $\sup_{z \in U_N} B_v^{p,q,s}\mu(z) < \infty.$

Hier ist $B_v^{p,q,s}\mu$ die in 3.3 eingeführte Berezin-Transformierte von μ.

Wegen 3.3.4 kann in allen Aussagen der Ausdruck $\sigma_v(B_r(z_n))^{1/p}$ durch $v(z_n)^{1/p}$ ersetzt werden. Wir werden in der Folge häufig davon Gebrauch machen.

Beweis. Wir beginnen mit (i)⇒(v). Für $w \in U_N$ haben wir für die Berezin-Transformierte von μ
$$\begin{aligned}(B_v^{p,q,s}\mu)(w) &= \int_{U_N} \frac{(1 - \|w\|^2)^{sq/p}}{v(w)^{q/p} |1 - (z|w)|^{sq/p}} d\mu(z) \\ &\leq c_r \left(\int_{U_N} \frac{(1 - \|w\|^2)^s}{v(w) |1 - (z|w)|^s} d\sigma_v(z)\right)^{q/p} \\ &= c_r \|k_{v,s,p,w}\|_{v,p}^q \leq c_r < \infty.\end{aligned}$$

Für (v)⇒(iv) verwenden wir 3.3.4(ii) und 2.2.2(ii):

$$\begin{aligned}\frac{\mu(B_r(w))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(w))^{1/p}} &\le c_r \frac{\mu(B_r(w))^{1/q}}{v(w)^{1/p}} = c_r \frac{(1-\|w\|^2)^{s/p}}{v(w)^{1/p}} \left(\int_{B_r(w)} \frac{1}{(1-\|w\|^2)^{sq/p}} d\mu(z)\right)^{1/q}\\ &\le c_r \left(\int_{B_r(w)} \frac{(1-\|w\|^2)^{sq/p}}{v(w)^{q/p}|1-(z|w)|^{sq/p}} d\mu(z)\right)^{1/q}\\ &\le c_r \left(\int_{U_N} \frac{(1-\|w\|^2)^{sq/p}}{v(w)^{q/p}|1-(z|w)|^{sq/p}} d\mu(z)\right)^{1/q}\\ &= c_r (B_v^{p,q,s}\mu)(w)^{1/q}.\end{aligned}$$

(iv)⇒(ii)⇒(iii) sind trivial. Für den Beweis von (iii)⇒(i) sei $(z_n)_n$ ein r-Verband, der (iii) erfüllt, und sei κ dessen Überdeckungskonstante. Unter Verwendung von 3.2.4 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{U_N} |f(z)|^q d\mu(z) &\le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} |f(z)|^q d\mu(z)\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} \left(\frac{c_{r,q,p}}{\sigma_v(B_{2r}(z_n))}\right)^{q/p} \left(\int_{B_{2r}(z_n)} |f(w)|^p d\sigma_v(w)\right)^{q/p} d\mu(z)\\ &\le c_{r,q,p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B_r(z_n))}{\sigma_v(B_r(z_n))^{q/p}} \left(\int_{B_{2r}(z_n)} |f(w)|^p d\sigma_v(w)\right)^{q/p}\\ &\le c_{r,q,p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{B_{2r}(z_n)} |f(w)|^p d\sigma_v(w)\right)^{q/p}\\ &\le c_{r,q,p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{2r}(z_n)} |f(w)|^p d\sigma_v(w)\right)^{q/p} \le c_{r,q,p}\kappa \left(\int_{U_N} |f(w)|^p d\sigma_v(w)\right)^{q/p}.\end{aligned}$$

■

Bemerkung 4.2.2. Eine Analyse des Beweises zeigt, dass in Satz 4.2.1 auf die Endlichkeit von μ verzichtet werden kann und sogar beliebige reguläre Borel-Masse μ auf U_N zugelassen werden können.

Bemerkung 4.2.3. Die Schritte (i)⇒(v)⇒(iv)⇒(ii)⇒(iii) gelten ohne Einschränkung für alle $0 < p, q < \infty$.

Wir werden in 4.6.5 sehen, dass für Standardgewichte v_α die Bergman-Bälle $B_r(z)$ durch Carleson-Gebiete $S(z)$ ersetzt werden können. Genauer gilt:

Satz 4.2.4. *Für $\alpha > -1$ und $0 < p \le q < \infty$ ist μ genau dann ein (α, p, q)-Carleson-Mass , wenn* $\sup_{z \in U_N} \frac{\mu(S(z))}{(1-\|z\|)^{(\alpha+N+1)q/p}} < \infty.$

Der Fall $p > q$

Wie bereits erwähnt, unterscheiden sich die Resultate für diesen Fall wesentlich von den vorangehenden.

Satz 4.2.5. *Seien v ein D-Gewicht, μ ein Mass auf U_N und $0 < q < p < \infty$. Setze weiter $u := p/(p-q)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $I : \mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ *ist wohldefiniert und beschränkt.*

(ii) *Für jeden r-Verband $(z_n)_n$ gilt* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(B_{2r}(z_n))}{v(z_n)^{q/p}}\right)^u < \infty.$

(iii) *Es gibt einen r-Verband, so dass gilt* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(B_{2r}(z_n))}{v(z_n)^{q/p}}\right)^u < \infty.$

(iv) *Es existiert ein $r > 0$, so dass* $\displaystyle\int_{U_N}\left(\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)}\right)^u d\sigma_v(z) < \infty.$

Wie schon vorher, erlaubt es 3.3.4 $\sigma_v(B_r(z))$ durch $v(z)$ zu ersetzen.

Für den Fall $N = 1$ und Standardgewichte hat Luecking zwei Beweise gegeben. Die Ideen aus [Lue86] wurden später in [KC91] aufgegriffen. Wir verallgemeinern bei unserem Beweis die Strategie aus [Lue93].

Beweis. (i)⇒(ii): Seien $(a_n)_n$ in l^p und $(z_n)_n$ ein beliebiger r-Verband mit der Überdeckungskonstanten κ. Mit der Voraussetzung und 3.5.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{U_N}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(1-\|z_n\|^2)^t}{v(z_n)^{1/p}(1-(z\,|\,z_n))^t}\right|^q d\mu(z) &\le c\left(\int_{U_N}\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(1-\|z_n\|^2)^t}{v(z_n)^{1/p}(1-(z\,|\,z_n))^t}\right|^p d\sigma_v(z)\right)^{q/p}\\ &= c\left\|T^{(p)}_{v,t}((a_n)_n)\right\|^q_{v,p}\\ &\le c\|(a_n)_n\|_p^q = c\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{q/p}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir t wie in 3.5.1 gewählt.

Seien r_n die Rademacher-Funktionen (vgl. (1.3)). Ersetzen wir in der vorangehenden Formel $(a_n)_n$ durch $(r_n(s)a_n)_n$ und integrieren nach $s \in [0,1]$, so erhalten wir unter Anwendung des Satzes von Fubini und der Khinchin-Ungleichung (vgl. 1.1.6)

$$\begin{aligned}c\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{q/p} &\ge \int_0^1\int_{U_N}\left|\sum_{n=1}^{\infty}r_n(s)a_n\frac{(1-\|z_n\|^2)^t}{v(z_n)^{1/p}(1-(z\,|\,z_n))^t}\right|^q d\mu(z)ds\\ &= \int_{U_N}\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{\infty}r_n(s)a_n\frac{(1-\|z_n\|^2)^t}{v(z_n)^{1/p}(1-(z\,|\,z_n))^t}\right|^q ds\,d\mu(z)\\ &\ge A_q^q\int_{U_N}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{(1-\|z_n\|^2)^{2t}}{v(z_n)^{2/p}|1-(z\,|\,z_n)|^{2t}}\right)^{q/2} d\mu(z).\end{aligned}$$

Hierbei ist A_q die Konstante aus der Khinchin-Ungleichung. Für $2 \leq q$ ergibt die Stetigkeit der Einbettung $l^2 \hookrightarrow l^q$

$$\int_{U_N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^q}{v(z_n)^{q/p}} d\mu(z) \leq \int_{U_N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^2}{v(z_n)^{2/p}} \right)^{q/2} d\mu(z).$$

Im Fall $q < 2$ liefert die Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int_{U_N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^q}{v(z_n)^{q/p}} d\mu(z) &\leq \int_{U_N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^2}{v(z_n)^{2/p}} \right)^{q/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_{2r}(z_n)}(z) \right)^{1-q/2} d\mu(z) \\ &\leq \kappa^{1-q/2} \int_{U_N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^2}{v(z_n)^{2/p}} \right)^{q/2} d\mu(z).\end{aligned}$$

Mit $c_{\kappa,q} := \max\{1, \kappa^{1-q/2}\}$ ist also in jedem Fall

$$\int_{U_N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^q}{v(z_n)^{q/p}} d\mu(z) \leq c_{\kappa,q} \int_{U_N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^2}{v(z_n)^{2/p}} \right)^{q/2} d\mu(z), \tag{4.11}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \frac{\mu(B_{2r}(z_n))}{v(z_n)^{q/p}} &= \int_{U_N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^q}{v(z_n)^{q/p}} d\mu(z) \\ &\leq c_{\kappa,q} \int_{U_N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^2}{v(z_n)^{2/p}} \right)^{q/2} d\mu(z) \\ &\leq c_{\kappa,r,q} \int_{U_N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{B_{2r}(z_n)}(z)|a_n|^2(1-\|z_n\|)^{2t}}{v(z_n)^{2/p}|1-(z|z_n)|^{2t}} \right)^{q/2} d\mu(z) \\ &\leq c_{\kappa,r,q} \int_{U_N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2(1-\|z_n\|)^{2t}}{v(z_n)^{2/p}|1-(z|z_n)|^{2t}} \right)^{q/2} d\mu(z) \\ &\leq \frac{c_{\kappa,r,q}}{A_q^q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{q/p}.\end{aligned}$$

Für eine Folge $(b_n)_n \in l^{p/q}$ ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \frac{\mu(B_{2r}(z_n))}{v(z_n)^{q/p}} \leq c_{\kappa,r,q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{p/q} \right)^{q/p}.$$

Wegen $u = p/(p-q) = (p/q)^*$ erhalten wir

$$\left(\frac{\mu(B_{2r}(z_n))}{v(z_n)^{q/p}} \right)_n \in l^{(p/q)^*} = l^u.$$

Das ist (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii) ist trivial.

(iii)⇒(iv): Für $z \in B_r(z_n)$ gilt $B_r(z) \subset B_{2r}(z_n)$. Mit 3.3.4(i) und (ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{U_N} \frac{\mu(B_r(z))^u}{v(z)^u} d\sigma_v(z) &\le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} \frac{\mu(B_r(z))^u}{v(z)^u} d\sigma_v(z)\\ &\le c_r \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} \frac{\mu(B_{2r}(z_n))^u}{v(z_n)^u} d\sigma_v(z)\\ &= c_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B_{2r}(z_n))^u}{v(z_n)^u} \sigma_v(B_r(z_n))\\ &\le c_r \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(B_{2r}(z_n))}{v(z_n)^{1-1/u}}\right)^u\\ &= c_r \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(B_{2r}(z_n))}{v(z_n)^{q/p}}\right)^u < \infty.\end{aligned}$$

(iv)⇒(i): Wir verwenden 3.2.3, den Satz von Fubini und 3.3.4.

$$\begin{aligned}\int_{U_N} |f(w)|^q d\mu(w) &\le c_{r,q} \int_{U_N} \int_{U_N} \frac{1}{\sigma_v(B_r(w))} 1_{B_r(w)}(z) |f(z)|^q d\mu(w) d\sigma_v(z)\\ &= c_{r,q} \int_{U_N} |f(z)|^q \int_{B_r(z)} \frac{1}{\sigma_v(B_r(w))} d\mu(w) d\sigma_v(z)\\ &\le c_{r,q} \int_{U_N} |f(z)|^q \int_{B_r(z)} \frac{1}{\sigma_v(B_r(z))} d\mu(w) d\sigma_v(z)\\ &= c_{r,q} \int_{U_N} |f(z)|^q \frac{\mu(B_r(z))}{\sigma_v(B_r(z))} d\sigma_v(z)\\ &\le c_{r,q} \left(\int_{U_N} |f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^{q/p} \left(\int_{U_N} \left(\frac{\mu(B_r(z))}{\sigma_v(B_r(z))}\right)^u d\sigma_v(z)\right)^{1/u}.\end{aligned}$$

Mit

$$c := c_{r,q}^{1/q} \left(\int_{U_N} \left(\frac{\mu(B_r(z))}{\sigma_v(B_r(z))}\right)^u d\sigma_v(z)\right)^{1/qu}$$

folgt so

$$\left(\int_{U_N} |f(w)|^q d\mu(w)\right)^{1/q} \le c \left(\int_{U_N} |f(z)|^p d\sigma_v(z)\right)^p.$$

■

Aus dem Beweis von 4.2.5 ergibt sich für $p > q$ nicht direkt eine Charakterisierung mit der Berezin-Transformierten $B_v^{p,q,s}\mu$ von μ. In Ergänzung zu 4.2.5 haben wir jedoch

Satz 4.2.6. *Seien v eine Gewichtsfunktion, welche $D(s)$ für ein $s > N$ erfüllt, μ ein Mass auf U_N, $0 < q < p < \infty$. Falls $B_v^{p,q,s}\mu \in L^{p/(p-q)}(\Lambda_N)$, so ist $I : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ wohldefiniert und beschränkt.*

Beweis. Wie im Beweis von (v)⇒(iv) in 4.2.1 zeigt man für jedes $w \in U_N$

$$\frac{\mu(B_r(w))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(w))^{1/p}} \leq c \left(\int_{U_N} \frac{(1-\|w\|^2)^{sq/p}}{v(w)^{q/p}|1-(z \mid w)|^{sq/p}} d\mu(z) \right)^{1/q} = c\,(B_v^{p,q,s}\mu)^{1/q}(w),$$

wobei c eine von w unabhängige Konstante ist. Aus 4.2.5 folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 4.2.7. Aus den Beweisen von 4.2.1 und 4.2.5 entnimmt man: Seien μ ein Mass auf U_N und $r>0$. Für jedes $0<p,q<\infty$ und jede Gewichtsfunktion mit D existiert eine Konstante $c=c(p,q,v)$, so dass für $p \leq q$

$$\frac{1}{c} \sup_{z \in U_N} \frac{\mu(B_r(z))^{1/q}}{v(z)^{1/p}} \leq \|I : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)\| \leq c \sup_{z \in U_N} \frac{\mu(B_r(z))^{1/q}}{v(z)^{1/p}} \tag{4.12}$$

und

$$\frac{1}{c}\,\|B_v^{p,q,s}\mu\|_\infty \leq \|I : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)\|^q \leq c\,\|B_v^{p,q,s}\mu\|_\infty \tag{4.13}$$

gelten. Für $q<p$ haben wir

$$\frac{1}{c} \int_{U_N} \left(\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)} \right)^q d\sigma_v \leq \|I : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)\| \leq c \int_{U_N} \left(\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)} \right)^q d\sigma_v. \tag{4.14}$$

Setzen wir

$$H_{v,p,q,\mu}(z) := \frac{\mu(B_r(z))^{1/q}}{v(z)^{1/p}},$$

so können wir die Sätze 4.2.1 und 4.2.5 wegen

$$\int_{U_N} \frac{\mu(B_r(z))^u}{v(z)^u} d\sigma_v(z) = \int_{U_N} \frac{\mu(B_r(z))^u}{v(z)^{u-1}} d\Lambda_N(z) = \int_{U_N} \left(\frac{\mu(B_r(z))^{1/q}}{v(z)^{1/p}} \right)^{pq/(p-q)} d\Lambda_N(z)$$

folgendermassen zusammenfassen:

Korollar 4.2.8. *Seien v eine D-Gewichtsfunktion, μ ein Mass auf U_N, $r>0$ und $0<p,q<\infty$.*

(i) *Für $0<p \leq q<\infty$ gilt $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}_v^p, L^q(\mu))$ genau dann, wenn $H_{v,p,q,\mu} \in L^\infty(\Lambda_N)$.*
(ii) *Für $0<q<p<\infty$ gilt $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}_v^p, L^q(\mu))$ genau dann, wenn $H_{v,p,q,\mu}$ ein Element von $L^{pq/(p-q)}(\Lambda_N)$ ist.*

4.3. Folgerungen

Wir befassen uns zuerst mit einigen Folgerungen, die sich direkt aus den vorangehenden Aussagen ergeben. In den folgenden Korollaren bezeichnet μ wie bis anhin ein endliches positives Borel-Mass auf U_N.

Aus 4.2.1 und 4.2.5 erhält man

Korollar 4.3.1. *Seien v eine D-Gewichtsfunktion, $0<p,q<\infty$ und $0<t<\infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}_v^p, L^q(\mu))$.
(ii) $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}_v^{tp}, L^{tq}(\mu))$.

Für die Beschränkheit ist also nur der Quotient p/q massgebend.

Weiter können wir die Stetigkeit von Einbettungen von Bergman-Räumen mit verschiedenen Gewichten miteinander in Beziehung setzen.

Korollar 4.3.2. *Seien $s, s' > N$, $v, \widetilde{v}$ D-Gewichte, $0 < p \leq r < \infty$ und $0 < q \leq t < \infty$. Falls ein $c > 0$ mit*

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\widetilde{v}(z)^{t/q}}{v(z)^{r/p}} \leq c$$

existiert, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^p_v, L^r(\mu))$.
(ii) $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^q_{\widetilde{v}}, L^t(\mu))$.

Speziell gilt:

Korollar 4.3.3. *Seien $0 < p, p' \leq q, r, r' > 0$ und v eine Gewichtsfunktion, so dass v^r und $v^{r'}$ die Bedingung D erfüllen. Falls $r/p = r'/p'$, so sind äquivalent:*

(i) $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^p_{v^r}, L^q(\mu))$.
(ii) $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^{p'}_{v^{r'}}, L^q(\mu))$.

Wählt man $v = 1 - \|\cdot\|^2$ und $r = \alpha + N + 1$, $r' = \alpha' + N + 1$, so erhält man

Korollar 4.3.4. *Seien $-1 < \alpha, \alpha' < \infty$, $0 < p \leq q < \infty$ und $0 < p' \leq q' < \infty$. Falls $q \cdot (\alpha + N + 1)/p = q' \cdot (\alpha' + N + 1)/p'$, dann sind äquivalent:*

(i) $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^p_\alpha, L^q(\mu))$.
(ii) $I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^{p'}_{\alpha'}, L^q(\mu))$.

Für $p \leq q$ ist also $q \cdot (\alpha + N + 1)/p$ der relevante Parameter.

Insbesondere erlaubt uns 4.2.8, Bedingungen für die Existenz von Inklusionen zwischen Bergman-Räumen anzugeben.

Korollar 4.3.5. *Seien $s, s' > N$, v, v' D-Gewichtsfunktionen, und $0 < p, q < \infty$.*

(i) *Falls $p \leq q$, so gilt $\mathcal{A}^p_v \hookrightarrow \mathcal{A}^q_{v'}$ genau dann, wenn ein $c > 0$ mit $v'(z)^{1/q}/v(z)^{1/p} \leq c$ für alle $z \in U_N$ existiert.*
(ii) *Falls $q < p$, so gilt $\mathcal{A}^p_v \hookrightarrow \mathcal{A}^q_{v'}$ genau dann, wenn $v'^{1/q}/v^{1/p} \in L^{pq/(p-q)}(\Lambda_N)$.*

Für $p = q$ rechnet man dies leicht direkt nach.

Setzt man nun $v(z) = (1 - \|z\|^2)^{\alpha+N+1}$ und $v'(z) = (1 - \|z\|^2)^{\beta+N+1}$, so erhält man ein für $N = 1$ wohlbekanntes Resultat (vgl. [Hor74]).

Korollar 4.3.6. *Sei $-1 < \alpha, \beta < \infty$ und $0 < p, q < \infty$.*

(i) *Falls $p \leq q$, so gilt $\mathcal{A}^p_\alpha \hookrightarrow \mathcal{A}^q_\beta$ genau dann, wenn $(\alpha + N + 1)/p \leq (\beta + N + 1)/q$.*
(ii) *Falls $q < p$, so gilt $\mathcal{A}^p_\alpha \hookrightarrow \mathcal{A}^q_\beta$ genau dann, wenn $(\alpha + 1)/p < (\beta + 1)/q$.*

Hervorzuheben ist, dass die Bedingung (ii) von der Dimension N unabhängig ist.

Weiter ist in vielen Fällen eine Reduktion auf Hilbert-Räume möglich.

Korollar 4.3.7. *Seien* $-1<\alpha,\alpha'<\infty$.

(i) *Falls* $0<p\le q<\infty$ *und* $\alpha'+N+1=q(\alpha+N+1)/p$, *so gilt* $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^p,L^q(\mu))$ *genau dann, wenn* $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\beta^2,L^2(\mu))$.
(ii) *Falls* $0<q<p<\infty$ *und* $p'/2=2/q'=p/q$, *so gilt* $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^p,L^q(\mu))$ *genau dann, wenn* $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^2,L^{q'}(\mu))$ *bzw.* $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^{p'},L^2(\mu))$.

4.4. Carleson-Einbettungen für $\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}$

Die Resultate über die atomare Zerlegung legen es nahe, dass mindestens teilweise die Bergman-Räume $\mathcal{A}_\alpha^p$ durch die Räume $\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}$ ersetzt werden können. Jedenfalls für $p\le q$ ist die Vermutung richtig. Betrachtet man für $v=v_\alpha$ den Ausdruck in 4.2.1(v) genauer, so erhält man mit $s=2\cdot(\alpha+N+1)$

$$\begin{aligned}\sup_{z\in U_N} B_v^{p,q,2(\alpha+N+1)}\mu(z) &= \sup_{z\in U_N}\int_{U_N}\left(\frac{1-\|z\|^2}{|1-(z\,|\,w)|^2}\right)^{(\alpha+N+1)/p} d\mu(w)\\ &= \sup_{z\in U_N}\|k_{\alpha,p,z}\|_{q,\mu}.\end{aligned}$$

Dabei sind

$$k_{\alpha,p,z}(w)=\left(\frac{1-\|z\|^2}{(1-(z\,|\,w))^2}\right)^{(\alpha+N+1)/p} \qquad (w\in U_N)$$

weiterhin die in $\mathcal{A}_\alpha^p$ normalisierten reproduzierenden Kerne. Ob μ ein (α,p,q)-Carleson-Mass ist, wird allein durch die Normen von $k_{\alpha,p,z}$ in $L^q(\mu)$ bestimmt. Die Räume $\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}$ erlauben eine Präzisierung dieser Beobachtungen.

Wir beginnen mit einer Charakterisierung der Existenz und Beschränktheit der formalen Identität $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}\to L^q(\mu)$.

Satz 4.4.1. *Seien* $0<p,q<\infty$ *und* $r\le\min\{1,q\}$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)},L^q(\mu))$.
(ii) $\sup_{z\in U_N}\|k_{\alpha,p,z}\|_{q,\mu}^q<\infty$.

Beweis. (i)⇒(ii) folgt sofort, da $\|k_{\alpha,p,z}\|_{\alpha,p,r}\le 1$ für alle $z\in U_N$ gilt.

Für (ii)⇒(i) sei $f\in\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}$ mit einer Darstellung

$$f=\sum_{n=1}^\infty a_n k_{\alpha,p,z_n} \tag{4.15}$$

gegeben, wobei $(a_n)_n\in l^r$ ist. Für jede Folge $(z_n)_n$ in U_N gilt im Falle $q\le 1$

$$\|f\|_{q,\mu}^q=\left\|\sum_{n=1}^\infty a_n k_{\alpha,p,z_n}\right\|_{q,\mu}^q\le\sum_{n=1}^\infty|a_n|^q\,\|k_{\alpha,p,z_n}\|_{q,\mu}^q\le c^q\sum_{n=1}^\infty|a_n|^q\le c^q\left(\sum_{n=1}^\infty|a_n|^r\right)^{q/r},$$

und im Fall $q>1$ erhalten wir

$$\|f\|_{q,\mu}=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n k_{\alpha,p,z_n}\right\|_{q,\mu}\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,\|k_{\alpha,p,z_n}\|_{q,\mu}\leq c\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^r\right)^{1/r}.$$

In beiden Fällen folgt die Behauptung durch Übergang zum Infimum über alle Darstellungen (4.15) von f. ■

Es ergibt sich direkt das folgende Korollar.

Korollar 4.4.2. *Seien $0<p,q<\infty$, $0<r,s\leq\min\{1,q\}$ und $t\geq r/q$. Dann sind äquivalent:*

(i) $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)},L^q(\mu))$.
(ii) $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^{(tp,r)},L^{tq}(\mu))$.
(iii) $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^{(p,s)},L^q(\mu))$.

Im Bezug auf die klassischen gewichteten Bergman-Räume haben wir:

Satz 4.4.3. *Seien $0<p\leq q<\infty$ und $r\leq\min\{1,q\}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^{p},L^q(\mu))$.
(ii) $I\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)},L^q(\mu))$.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii): Für $p\geq r$ folgt die Behauptung sofort aus 3.5.9. Sei jetzt $p<r$. Aus 4.3.1 und (3.17) folgt, dass $I:\mathcal{A}_\alpha^r=\mathcal{A}_\alpha^{(r,r)}\to L^{qr/p}(\mu)$ stetig ist. Für $s=p/r$ gilt $s\geq p/q=r/(rq/p)$, und 4.4.2 liefert die Existenz und Stetigkeit von $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}\to L^q(\mu)$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Für $s=r/p$ gilt $s\geq r/q$, und wegen 4.4.2 und (3.17) existiert die Einbettung $I:\mathcal{A}_\alpha^r=\mathcal{A}_\alpha^{(r,r)}\to L^{qr/p}(\mu)$ und ist beschränkt. Mit 4.3.1 folgt (i). ■

Für $p\leq q$ können wir also vom Bergman-Raum $\mathcal{A}_\alpha^p$ auf den im Allgemeinen kleineren Raum $\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}$ wechseln. Im Gegensatz zu den Bergman-Räumen gelten aber hierfür die gleichen Charakterisierungen auch im Fall $p>q$.

Eine weitere interessante Ergänzung von 4.2.8 beinhaltet das folgende Korollar.

Korollar 4.4.4. *Für $1\leq q<p<\infty$ und $\alpha>-1$ mit $Np/q-N-1<\alpha$ gilt*

$$H_{v_\alpha,p,q,\mu}\in L^{pq/(p-q)}(\Lambda_N)\Rightarrow H_{v_\alpha,p,q,\mu}\in L^\infty(\Lambda_N).$$

Beweis. Mit $\alpha' + N + 1 = (\alpha + N + 1)p/q$ gilt

$$\begin{aligned}
H_{v_\alpha,p,q,\mu} \in L^{pq/(p-q)}(\Lambda_N) &\Leftrightarrow I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^p_\alpha, L^q(\mu)) \\
&\Leftrightarrow I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^{p/q}_\alpha, L^1(\mu)) \\
&\Rightarrow I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^{(p/q,1)}_\alpha, L^1(\mu)) \\
&\Leftrightarrow I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^{(1,1)}_{\alpha'}, L^1(\mu)) \\
&\Leftrightarrow I \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}^1_{\alpha'}, L^1(\mu)) \\
&\Leftrightarrow H_{v_{\alpha'},1,1,\mu} \in L^\infty(\Lambda_N) \\
&\Leftrightarrow H_{v_\alpha,p,q,\mu} \in L^\infty(\Lambda_N)
\end{aligned}$$

■

Die Umkehrung gilt nicht allgemein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 4.4.5. Sei $N = 1$, und seien α, p, q wie in Korollar 4.4.4 gewählt. Weiter seien $(a_n)_n$ eine Folge in $l^\infty \setminus l^{p/(p-q)}$ und $(z_n)_n$ ein r-Netz in U_1. Wir betrachten das Mass $\mu = \sum_n b_n \delta_{z_n}$ wobei $(b_n)_n \in l^1$ durch $b_n = |a_n|(1-|z_n|^2)^{q(\alpha+2)/p}$ definiert ist. Eine leichte Rechnung zeigt, dass $H_{v_\alpha,p,q,\mu}$ in $L^\infty(\Lambda_1)$, aber nicht in $L^{pq/(p-q)}(\Lambda_1)$ ist.

4.5. Spezialfälle

Die Resultate in diesem Kapitel haben natürlich Konsequenzen für Multiplikations-, Kompositions- und Restriktionsoperatoren. Insbesondere lassen sich die Abhängigkeiten von den Indizes mehr oder weniger direkt übertragen. Wir streben keine Vollständigkeit an und beschränken uns auf einige wichtige Fälle.

Das durch einen Multiplikationsoperator bzw. einen Kompositionsoperator induzierte Mass ist nicht immer handlich und sagt wenig über das zugehörige Symbol aus. Das ändert sich, wenn wir analytische Symbole betrachten.

Multiplikationsoperatoren

Für allgemeine Multiplikationsoperatoren erwähnen wir nur ein ganz einfaches spezielles Resultat. Sei μ weiterhin ein positives endliches Borel-Mass auf U_N.

Satz 4.5.1. *Für eine messbare Funktion $h : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ und $t > 0$ sind äquivalent:*

(i) $M_h : \mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ *existiert als beschränkter Operator.*
(ii) $M_{|h|} : \mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ *existiert als beschränkter Operator.*
(iii) $M_{|h|^{1/t}} : \mathcal{A}^{tp}_v \to L^{tq}(\mu)$ *existiert als beschränkter Operator.*

Für Multiplikationsoperatoren mit analytischen Symbolen spielen die in 3.3 eingeführten Räume

$$X_v := \{f : U_N \to \mathbb{C} \text{ analytisch, } \|f\|_{v,\infty} := \sup_{z \in U_N} |f(z)|v(z) < \infty\}$$

eine wichtige Rolle.

Satz 4.5.2. *Seien $h : U_N \to \mathbb{C}$ analytisch und v, $\widetilde{v}$ D-Gewichte.*

(i) *Für $0 < p \le q < \infty$ sei*
$$w := \frac{\widetilde{v}^{1/q}}{v^{1/p}}$$
Genau dann ist $M_h : \mathcal{A}^p_v \to \mathcal{A}^q_{\widetilde{v}}$ wohldefiniert und beschränkt, wenn $h \in X_w$.

(ii) *Für $0 < q < p < \infty$ sei*
$$\widetilde{w} := \frac{\widetilde{v}^{p/(p-q)}}{v^{q/(p-q)}}.$$
Genau dann ist $M_h : \mathcal{A}^p_v \to \mathcal{A}^q_{\widetilde{v}}$ wohldefiniert und beschränkt, wenn $h \in \mathcal{A}^{pq/(p-q)}_{\widetilde{w}}$.

Für $N = 1$ und $v = v_\alpha$ und $\widetilde{v} = v_\beta$ wurde dieses Resultat in [Zha04] bewiesen. Zuvor ist bereits der Fall $\alpha = \beta = 0$ in [Att82] erledigt worden.

Beweis. (i): Setze $d\mu_h := |h|^q d\sigma_{\widetilde{v}}$. Nach 4.2.1 ist $M_h : \mathcal{A}^p_v \to \mathcal{A}^q_{\widetilde{v}}$ genau dann wohldefiniert und beschränkt, wenn für ein $r > 0$
$$\sup_{z \in U_N} \frac{\mu_h(B_r(z))}{v(z)^{q/p}} < \infty. \tag{4.16}$$
Gemäss 3.3.4 und 3.2.3 existiert eine Konstante $c_r > 0$, so dass
$$\frac{\mu_h(B_r(z))}{v(z)^{q/p}} = \frac{1}{v(z)^{q/p}} \int_{B_r(z)} |h(w)|^q d\sigma_{\widetilde{v}}(w) \ge c_r \frac{\widetilde{v}(z)}{v(z)^{q/p}} |h(z)|^q \quad \forall z \in U_N.$$
Falls also M_h wohldefiniert und beschränkt ist, gilt
$$\sup_{z \in U_N} w(z)\,|h(z)| = \sup_{z \in U_N} \frac{\widetilde{v}(z)^{1/q}}{v(z)^{1/p}}\,|h(z)| < \infty$$
und somit $h \in X_w$. Ist umgekehrt
$$K := \sup_{z \in U_N} \frac{\widetilde{v}(z)^{1/q}}{v(z)^{1/p}}\,|h(z)| < \infty,$$
so folgt aus 3.3.4
$$\begin{aligned}\frac{\mu_h(B_r(z))}{v(z)^{q/p}} &= \frac{1}{v(z)^{q/p}} \int_{B_r(z)} |h(w)|^q d\sigma_{\widetilde{v}}(w) \\ &\le c \int_{B_r(z)} \frac{|h(w)|^q \widetilde{v}(w)}{v(w)^{q/p}} d\Lambda_N(w) \\ &\le c K^q < \infty,\end{aligned}$$
also mit (4.16) die Behauptung.

(ii): Sei zuerst $M_h : \mathcal{A}^p_v \to \mathcal{A}^q_{\widetilde{v}}$ wohldefiniert und beschränkt. Gemäss 3.2.3 und 3.3.4 existiert eine Konstante $c_r > 0$, so dass

$$\begin{aligned}\int_{U_N} \frac{\widetilde{v}(z)^{p/(p-q)}}{v(z)^{q/(p-q)}} |h(z)|^{pq/(p-q)} d\Lambda_N(z) \\ &\le c_r \int_{U_N} \frac{\widetilde{v}(z)^{p/(p-q)}}{v(z)^{q/(p-q)}} \left(\int_{B_r(z)} |h(w)|^q d\Lambda_N(w) \right)^{p/(p-q)} d\Lambda_N(z) \\ &\le c_r \int_{U_N} \left(\frac{\mu_h(B_r(z))}{v(z)} \right)^{p/(p-q)} d\sigma_v(z) < \infty.\end{aligned}$$

Es ist also

$$h \in \mathcal{A}^{pq/(p-q)}_{\widetilde{w}}. \tag{4.17}$$

Umgekehrt folgt aus (4.17) mit der Ungleichung von Hölder:

$$\begin{aligned}\|hf\|^q_{\widetilde{v},q} &= \int_{U_N} |hf|^q \widetilde{v} d\Lambda_N \\ &\le \left(\int_{U_N} |f|^p v d\Lambda_N \right)^{q/p} \left(\int_{U_N} |h|^{pq/(p-q)} \frac{\widetilde{v}^{p/(p-q)}}{v^{q/(p-q)}} d\Lambda_N \right)^{(p-q)/p} \\ &\le \|h\|^q_{\widetilde{w},(p-q)/pq} \|f\|^q_{v,p};\end{aligned}$$

wie behauptet ist M_h wohldefiniert und beschränkt. ■

Hervorzuheben sind die Fälle, in denen $X_w = \{0\}$ gilt, d.h. in denen ausser dem trivialen Multiplikationsoperator zum Symbol $h = 0$ keine weiteren existieren. Dies ist wegen des Maximumprinzips zum Beispiel dann der Fall, wenn $\lim_{\|z\| \to 1} w(z) = 0$ gilt.

Kompositionsoperatoren

Bei Kompositionsoperatoren ist das Bild wesentlich komplizierter. Im Fall $N = 1$ folgt aus dem Subordinationssatz von Littlewood (vgl. [CM95] Theorem 2.22), dass für alle $-1 \le \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$ und jede analytische Funktion $\varphi : U_1 \to U_1$ der Kompositionsoperator $C_\varphi : \mathcal{A}^p_\alpha \to \mathcal{A}^p_\alpha$ wohldefiniert und beschränkt ist. Für $N \ge 2$ präsentiert sich die Situation völlig anders. In [MM95] Corollary 69, wird gezeigt:

Satz 4.5.3. *Für jedes $N \ge 2$, $0 < p < \infty$ und $\alpha > -1$ existiert eine analytische Funktion $\varphi : U_N \to U_N$, so dass C_φ keinen beschränkten Operator $\mathcal{A}^p_\alpha \to \mathcal{A}^p_\alpha$ definiert.*

Weitere Beispiele für solche Symbole finden sich in [MS86].

Für Kompositionsoperatoren, deren Symbole Automorphismen sind, ist indessen eine Übertragung der vom Eindimensionalen her bekannten Sätze möglich.

Satz 4.5.4. *Seien $\varphi : U_N \to U_N$ analytisch und $v, \widetilde{v}$ D-Gewichte.*

(i) *Seien $0 < p \le q < \infty$. Ist $C_\varphi : \mathcal{A}^p_v \to \mathcal{A}^q_{\widetilde{v}}$ definiert, so gilt*

$$\sup_{z \in U_N} \frac{\widetilde{v}(z)^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}} < \infty.$$

Ist $\varphi \in Aut(U_N)$, so gilt auch die Umkehrung.

(ii) *Seien $0 < q < p < \infty$ und $\varphi \in Aut(U_N)$. Genau dann ist der Kompositionsoperator $C_\varphi : \mathcal{A}_v^p \to \mathcal{A}_{\widetilde{v}}^q$ wohldefiniert und beschränkt, wenn*

$$\frac{\widetilde{v}(\varphi^{-1}(z))^{1/q}}{v(z)^{1/p}} \in L^{pq/(p-q)}(\Lambda_N).$$

Beweis. (i): Sei $w \in \varphi(U_N)$. Für jedes $z \in \varphi^{-1}(w)$ gilt $B_r(z) \subset \varphi^{-1}(B_r(w))$ wegen 2.2.1. Also haben wir

$$\sup_{z \in \varphi^{-1}(w)} \frac{\sigma_{\widetilde{v}}(B_r(z))^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}} \leq \frac{\sigma_{\widetilde{v}}(\varphi^{-1}(B_r(w)))^{1/q}}{v(w)^{1/p}}.$$

Wir bilden nun das Supremum über alle $w \in \varphi(U_N)$ und erhalten

$$\sup_{z \in U_N} \frac{\sigma_{\widetilde{v}}(B_r(z))^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}} = \sup_{w \in \varphi(U_N)} \sup_{z \in \varphi^{-1}(w)} \frac{\sigma_{\widetilde{v}}(B_r(z))^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}} \leq \sup_{w \in \varphi(U_N)} \frac{\sigma_{\widetilde{v}}(\varphi^{-1}(B_r(w)))^{1/q}}{v(w)^{1/p}}.$$

Mit einer Konstanten $c_r > 0$ gilt weiter

$$\sup_{z \in U_N} \frac{\widetilde{v}(z)^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}} \leq c_r \sup_{z \in U_N} \frac{\sigma_{\widetilde{v}}(B_r(z))^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}} \leq \sup_{z \in U_N} \frac{\sigma_{\widetilde{v}}(\varphi^{-1}(B_r(w)))^{1/q}}{v(w)^{1/p}}.$$

Dies liefert die erste Behauptung für beliebige Symbole φ.

Ist sogar $\varphi \in \mathrm{Aut}(U_N)$, so gilt $\varphi^{-1}(B_r(z)) = B_r(\varphi^{-1}(z))$, und wir haben wie vorhin mit einer Konstanten c_r

$$\sup_{w \in U_N} \frac{\sigma_{\widetilde{v}}(\varphi^{-1}(B_r(w)))^{1/q}}{v(w)^{1/p}} \leq c_r \sup_{z \in U_N} \frac{\widetilde{v}(z)^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}}.$$

Da $\sigma_{\widetilde{v}} \circ \varphi^{-1}$ das zum Kompositionsoperator $C_\varphi : \mathcal{A}_v^p \to \mathcal{A}_{\widetilde{v}}^q$ gehörende Mass ist, sind wir mit (i) nach 4.2.1 fertig.

Die Aussage (ii) ergibt sich aus 4.2.5 und

$$\begin{aligned}\int_{U_N} \left(\frac{\sigma_{\widetilde{v}}(B_r(z))^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}} \right)^{pq/(p-q)} d\Lambda_N(z) &= \int_{U_N} \left(\frac{\sigma_{\widetilde{v}}(B_r(\varphi^{-1}(z)))^{1/q}}{v(z)^{1/p}} \right)^{pq/(p-q)} d\Lambda_N(z) \\ &= \int_{U_N} \left(\frac{\sigma_{\widetilde{v}}(\varphi^{-1}(B_r(z)))^{1/q}}{v(z)^{1/p}} \right)^{pq/(p-q)} d\Lambda_N(z).\end{aligned}$$

■

Mit 2.2.2 erhalten wir für die Standardgewichte:

Korollar 4.5.5. *Seien $\alpha, \beta > -1$ und $\varphi \in Aut(U_N)$.*

(i) *Für $0 < p \leq q < \infty$ gilt $C_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_\alpha^p, \mathcal{A}_\beta^q)$ genau dann, wenn $(\alpha + N + 1)/p \leq (\beta + N + 1)/q$.*

(ii) *Für $0 < q < p < \infty$ ist $C_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_\alpha^p, \mathcal{A}_\beta^q)$ genau dann, wenn $(\alpha + 1)/p \leq (\beta + 1)/q$.*

Wir bekommen also dieselben Bedingungen wie für Carleson-Einbettungen.

Restriktionsoperatoren

Für gewichtete Restriktionsoperatoren (vgl. Seite 56) haben wir zunächst folgendes Resultat:

Satz 4.5.6. *Seien $w=(w_n)_n$ eine separierte Folge in U_N, $a=(a_n)_n$ eine Folge positiver Zahlen und v eine Gewichtsfunktion, welche D erfüllt.*

(a) *Für $0<p\leq q<\infty$ sind äquivalent:*
   (i) $R^q_{a,w}\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}^p_v,l^q)$.
   (ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{a_n}{v(w_n)^{q/p}}<\infty$.

(b) *Für $0<q<p<\infty$ sind äquivalent:*
   (i) $R^q_{a,w}\in\mathfrak{L}(\mathcal{A}^p_v,l^q)$.
   (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{p/(p-q)}v(w_n)^{q/(p-q)}<\infty$.

Beweis. (a) Aus den Überlegungen auf Seite 56 und 4.2.1 folgt, dass $R^q_{a,w}:\mathcal{A}^p_v\to l^q$ genau dann existiert, wenn für $r>0$

$$\sup_{z\in U_N}\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)^{q/p}}<\infty, \tag{4.18}$$

wobei wir

$$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\delta_{w_n}$$

setzen. Sei $(w_n)_n$ δ-separiert. Die Bälle $B_{\delta/2}(z)$ enthalten höchstens ein Folgenglied von $(w_n)_n$. Wählen wir speziell $r=\delta/2$, so gilt deshalb,

$$\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)^{q/p}}=\begin{cases}\dfrac{a_{n_0}}{v(w)^{q/p}} & \text{falls } w\in B_r(w_{n_0})\ \ (n_0\in\mathbb{N})\\ 0 & \text{falls } w\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}B_r(w_n)\end{cases}$$

Gemäss 3.3.4 sind (4.18) und (a) äquivalent.

(b) Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis von (a). Wegen 4.2.5 ist der Operator $R^q_{a,w}:\mathcal{A}^p_v\to l^q$ genau dann wohldefiniert und beschränkt, wenn

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{p/(p-q)}\int_{B_r(w_n)}v(z)^{q/(p-q)}d\Lambda_N(z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_r(w_n)}\left(\frac{a_n}{v(z)}\right)^{p/(p-q)}d\sigma_v(z)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_r(w_n)}\left(\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)}\right)^{p/(p-q)}d\sigma_v(z)=\int_{\bigcup_n B_r(w_n)}\left(\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)}\right)^{p/(p-q)}d\sigma_v(z)\\&=\int_{U_N}\left(\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)}\right)^{p/(p-q)}d\sigma_v(z)<\infty.\end{aligned}$$

Wegen 3.3.4 ist dies äquivalent zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{p/(p-q)} v(w_n)^{q/(p-q)} \Lambda_N(B_r(0)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{p/(p-q)} \int_{B_r(w_n)} v(w_n)^{q/(p-q)} d\Lambda_N(z) < \infty. \qquad \blacksquare$$

Dieses Resultat gilt offensichtlich auch für Folgen $(w_n)_n$, welche sich als endliche Vereinigung von separierten Folgen darstellen lassen.

Wir betrachten nun speziell Gewichte der Form $(a_n)_n = (v(w_n))_n$, wobei v eine Gewichtsfunktion und $(w_n)_n$ eine Folge in U_N ist. Zur Vorbereitung beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.5.7. *Genau dann ist eine Folge $(w_n)_n$ in U_N die Vereinigung von endlich vielen separierten Folgen, wenn ein $r > 0$ existiert mit*

$$K_r := \sup_{z \in U_N} |B_r(z) \cap \{w_n : n \in \mathbb{N}\}| < \infty.$$

Beweis. Sei zuerst $(w_n)_n$ die Vereinigung von endlich vielen δ-separierten Folgen $(w_{k,n})_n$ $(1 \leq k \leq M)$, $\delta > 0$. Falls ein $z_0 \in U_N$ mit $\left|B_{\delta/2}(z_0) \cap \{w_n : n \in \mathbb{N}\}\right| > M$ existiert, finden wir für ein $1 \leq k_0 \leq M$ Folgenglieder $w_{k_0,l}$ und $w_{k_0,m}$ in $B_{\delta/2}(z)$, $l \neq m$. Für diese gilt

$$\beta(w_{k_0,l}, w_{k_0,m}) \leq \beta(w_{k_0,l}, z_0) + \beta(z_0, w_{k_0,m}) \leq \delta.$$

Dies steht im Widerspruch zur δ-Separiertheit von $(w_{k_0,n})_n$.

Sei nun die Bedingung erfüllt. $B_r(w_1)$ enthält nach Voraussetzung $l_1 \leq K_r$ Glieder $z_1, \ldots, z_{l_1}$ der Folge $(w_n)_n$. Sei $\Gamma_k^1 := \{z_k\}$ für jedes $1 \leq k \leq l_1$. Für das erste Element w_{n_1} aus der Folge $(w_n)_n$, das noch nicht zugeordnet wurde, gilt $\beta(w_{n_1}, w_1) \geq r$. Gilt $w_1 \in \Gamma_j^1$ $(1 \leq j \leq l_1)$, so setze $\Gamma_j^2 = \Gamma_j^1 \cup \{w_{n_1}\}$, $l_2 = l_1$ und $\Gamma_k^2 = \Gamma_k^1$ für $1 \leq k \leq l_1$, $k \neq j$. Seien nun nach m Schritten Mengen $\Gamma_1^m, \ldots, \Gamma_{l_m}^m$ $(l_m \leq K_r)$ so konstruiert, dass $\beta(z,w) \geq r$ für $z, w \in \Gamma_k^m$ $(1 \leq k \leq l_m)$ und sei w^* das erste Element der Folge $(w_n)_n$, das noch nicht zugeordnet ist. Nach Voraussetzung enthält $B_r(w^*)$ Elemente $w_1^*, \ldots, w_k^*$ $(k \leq K_r - 1)$ der Folge $(w_n)_n$, die bereits zugeordnet wurden.

Falls ein $1 \leq j \leq l_m$ existiert mit $w_i^* \notin \Gamma_j^m$ für alle $1 \leq i \leq k$, so setzte $l_{m+1} = l_m$, $\Gamma_j^{m+1} = \Gamma_j^m \cup \{w^*\}$ und $\Gamma_i^{m+1} = \Gamma_i^m$ für $1 \leq i \leq l_m$, $i \neq j$. Dies ist zum Beispiel immer der Fall, wenn $l_m = K_r$.

Falls kein solches j existiert, setzen wir $l_{m+1} = l_m + 1$, $\Gamma_i^{m+1} = \Gamma_i^m$ für $1 \leq i \leq l_m$ und $\Gamma_{l_{m+1}}^m = \{w^*\}$.

In beiden Fällen haben wir $l_{m+1} \leq K_r$ Mengen $\Gamma_1^{m+1}, \ldots, \Gamma_{l_{m+1}}^{m+1}$ mit $\beta(z,w) \geq r$ für $z, w \in \Gamma_i^{m+1}$ $(1 \leq i \leq l_{m+1})$. Rekursiv erhalten wir Mengen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ $(1 \leq l \leq K_r)$ mit $\beta(z,w) \geq r$ für $z, w \in \Gamma_i$ $(1 \leq i \leq l)$ und damit die gesuchten Folgen. $\blacksquare$

Korollar 4.5.8. *Seien v eine D-Gewichtsfunktion, $0 < p \leq q < \infty$, $(w_n)_n$ eine beliebige Folge in U_N und $a_n = v(w_n)^{q/p}$ $(n \in \mathbb{N})$. Genau dann ist $R_{a,w}^q : \mathcal{A}_v^p \to l^q$ wohldefiniert und beschränkt, wenn $(w_n)_n$ die Vereinigung von endlich vielen separierten Folgen ist.*

Beweis. Genau dann ist $R^q_{a,w}:\mathcal{A}^p_v\to l^q$, wohldefiniert und beschränkt, wenn

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} v(w_n)^{q/p}\delta_{w_n}$$

ein (v,p,q)-Carleson-Mass ist. Dies ist wegen 4.2.1, genau dann der Fall, wenn

$$\sup_{z\in U_N}\sum_{n:w_n\in B_r(z)}\frac{v(w_n)^{q/p}}{v(z)^{q/p}} = \sup_{z\in U_N}\frac{1}{v(z)^{q/p}}\left(\sum_{n:w_n\in B_r(z)} v(w_n)^{q/p}\right) = \sup_{z\in U_N}\frac{\mu(B_r(z))}{v(z)^{q/p}} < \infty.$$

Wegen 3.3.4 ist dies äquivalent zu

$$\sup_{z\in U_N}|B_r(z)\cap\{w_n : n\in\mathbb{N}\}| = \sup_{z\in U_N}\sum_{n:w_n\in B_r(z)}\frac{v(w_n)^{q/p}}{v(w_n)^{q/p}} < \infty.$$

Mit 4.5.7 folgt die Behauptung. ∎

4.6. Hardy-Räume

Für Kompositionsoperatoren auf Hardy-Räumen ist es erforderlich, Masse auf $\overline{U_N}$ zu betrachten: vgl. [BJar] für den Fall $N=1$. Wir behandeln hier den mehrdimensionalen Fall. Wie in Kapitel 3.4 bezeichnen wir für ein $f\in H^p$ mit f^* dessen fast überall definierte Randfunktion.

Wir wissen schon, dass $f\mapsto f^*$ einen isometrischen Isomorphismus von H^p auf einen Teilraum von $L^p(m_N)$ definiert, dessen Bild wir mit $H^p(S_N)$ bezeichnen. In gewissen Situationen ist es von Vorteil, die isometrische Einbettung $H^p\to H^p\oplus_\infty H^p(S_N)$: $f\mapsto(f,f^*)$ zu betrachten. Mit $f^\bullet$ bezeichnen wir sowohl das Paar (f,f^*) als auch jede messbare Funktion $F:\overline{U_N}\to\mathbb{C}$, welche $F|_{U_N}=f$ und $F(\zeta)=f^*(\zeta)$ für m_N-fast alle $\zeta\in S_N$ erfüllt.

Seien $0<p,q<\infty$. Ein Mass μ auf $\overline{U_N}$ heisst **(p,q)-Carleson-Mass**, falls $f\mapsto f^\bullet$ einen beschränkten linearen Operator

$$J : H^p \to L^q(\mu)$$

definiert.

Solche Masse treten insbesondere bei Kompositionsoperatoren zwischen Hardy-Räumen auf. In diesem Fall existieren Randfunktionen, die wir ebenfalls in Betracht ziehen müssen.

Sei φ eine analytische Funktion $\varphi:U_N\to U_N$ und φ^* dessen fast überall definierte Randfunktion. Durch

$$m_\varphi(B) := m_N((\varphi^*)^{-1}(B))$$

für Borel-Mengen $B\subset\overline{U_N}$ wird ein Mass m_φ auf $\overline{U_N}$ gegeben. Es gilt

Satz 4.6.1. *Genau dann definiert $C_\varphi:H^p\to H^q$ einen beschränkten Operator, wenn m_φ ein (p,q)-Carleson-Mass ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der für $f \in A(U_N) := \mathcal{H}(U_N) \cap C(\overline{U_N})$ (Ball-Algebra) gültigen Beziehung

$$\|C_\varphi f\|_{H^q}^q = \int_{U_N} |(f \circ \varphi)^*|^q dm_N = \int_{U_N} |f^\bullet \circ \varphi^*|^q dm_N = \int_{U_N} |f^\bullet| m_\varphi = \|f^\bullet\|_{q,m_\varphi}^q$$

und der Tatsache, dass $A(U_N)$ in H^p dicht ist. ■

Für direkte Charakterisierungen durch Eigenschaften von φ sind wie bei den Bergman-Räumen die Fälle $p \leq q$ und $p > q$ zu unterscheiden. Wir betrachten zuerst den Fall $p \leq q$. Wir gehen in zwei Schritten vor und untersuchen zunächst Carleson-Masse, die nur auf U_N definiert sind. Anschliessend erweitern wir die Resultate auf $\overline{U_N}$.

Wir verallgemeinern im Folgenden ein Resultat von S.C. Power ([Pow85]). Zunächst zitieren wir ein Resultat aus dieser Arbeit:

Lemma 4.6.2. *Es existiert ein $c > 0$, so dass für jedes $w \in U_N$*

$$m_N(Q(\frac{w}{\|w\|}, (1 + 2\sqrt{2})^2(1 - \|w\|))) \leq c\, m_N(Q(w, 1 - \|w\|^2)).$$

Folgende Zerlegung von U_N spielt eine zentrale Rolle:

Lemma 4.6.3. *Seien $g : U_N \to \mathbb{C}$ stetig, $0 < r < 1$ und $a > 0$. Falls ein $w \in U_N \setminus rU_N$ mit $|g(w)| \geq a$ existiert, gibt es eine (eventuell endliche) Folge $(w_n)_n$ in $U_N \setminus rU_N$ mit*

(i) $|g(w_n)| \geq a$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\{w : |g(w)| \geq a\} \cap (U_N \setminus rU_N) \subset \bigcup_n S(w_n, 4(1 - \|w_n\|^2))$.
(iii) *Die Mengen* $Q(w_n, (1 - \|w_n\|^2))$ *sind paarweise disjunkt.*

Beweis. Wähle $w_1 \in U_N \setminus rU_N$ so, dass $|g(w_1)| \geq a$ gilt und $\|w_1\|$ minimal ist. Sind für ein $n \in \mathbb{N}$ $w_1, \ldots, w_n$ mit $w_l \notin S(w_k, 4(1 - \|w_k\|^2))$ für $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq n$ und $|g(w_l)| \geq a$ für $1 \leq l \leq n$ bereits gewählt. Wir wählen $w_{n+1} \in U_N \setminus rU_N$ mit $w_{n+1} \notin S(w_k, 4(1 - \|w_k\|^2))$ für $1 \leq k \leq n$ und $|g(w_{n+1})| \geq a$, und zwar so, dass $\|w_{n+1}\|$ minimal ist. Falls kein solches w_{n+1} existiert, brechen wir ab; sonst fahren wir rekursiv weiter.

Die so erhaltene Folge erfüllt nach Konstruktion die Bedingung (i). Ist $(w_n)_n$ eine endliche Folge, so ist (ii) offensichtlich. Für den Fall einer unendlichen Folge nehmen wir an, es existiere ein $w_0 \in \{w : |g(w)| \geq a\} \cap U_N \setminus rU_N$ mit $w_0 \notin \cup_n S(w_n, 4(1 - \|w_n\|^2))$. Nach Konstruktion gilt $\|w_0\| \geq \|w_n\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $(w_n)_n$ vom Rand ∂U_N wegbeschränkt und besitzt einen Häufungspunkt $z \in U_N$. Für n_1, n_2 mit $\|w_{n_1} - w_{n_2}\| \leq 3(1 - \|w_0\|^2)$ haben wir

$$|1-(w_{n_1} \mid w_{n_2})| \leq 1-\|w_{n_1}\|^2+\|w_{n_1} - w_{n_2}\| \leq 1-\|w_{n_1}\|^2+3(1-\|w_0\|^2) \leq 4(1-\|w_{n_1}\|^2).$$

w_{n_2} gehört zu $S(w_{n_1}, 4(1 - \|w_{n_1}\|^2))$, was der Konstruktion widerspricht. (iii) folgt aus 2.4.3, denn nach Konstruktion ist $\|w_k\| \leq \|w_l\|$ und $w_l \notin Q(w_k, 4(1 - \|w_k\|^2))$ für $k < l$. ■

Satz 4.6.4. *Seien $0<p\le q<\infty$ und μ ein Mass auf U_N. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $I\in\mathcal{L}(H^p,L^q(\mu))$.

(ii) *Es existiert ein $c>0$, so dass* $\sup\limits_{0<h<1}\dfrac{\mu(S(\zeta,h))}{h^{Nq/p}}\le c$ *für jedes $\zeta\in S_N$ gilt.*

(iii) $\sup\limits_{z\in U_n}\dfrac{\mu(S(z))^{1/q}}{(1-\|z\|^2)^{N/p}}<\infty$.

(iv) $\sup\limits_{z\in U_N}\displaystyle\int_{U_N}\left(\frac{1-\|z\|^2}{|1-(w\,|\,z)|^2}\right)^{qN/p}d\mu(w)<\infty$.

Einen Beweis für den Fall $N=1$ findet man in [Dur70] Theorem 9.4. In [CM95] Theorem 2.37, wird ein Beweis für $N\ge1$ und $p=q$ gegeben, der auf Hörmander zurückgeht.

Beweis. (i)⇒(iv): Nach 3.8 gilt mit einer Konstanten $c>0$

$$\int_{U_N}\left(\frac{1-\|z\|^2}{|1-(w\mid z)|^2}\right)^{qN/p}d\mu(w)=\|k_{-1,p,z}\|_{q,\mu}^q\le\|I\|^q\,\|k_{-1,p,z}\|_{H^p}^q\le c\,\|I\|^q\,.$$

(iv)⇒(iii): Mit 2.4.2 (ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mu(S(z))}{(1-\|z\|^2)^{qN/p}}&=\int_{S(z)}\frac{(1-\|z\|^2)^{Nq/p}}{(1-\|z\|^2)^{2Nq/p}}d\mu(w)\le c\int_{S(z)}\frac{(1-\|z\|^2)^{Nq/p}}{|1-(w|z)|^{2Nq/p}}d\mu(w)\\&\le c\int_{U_N}\frac{(1-\|z\|^2)^{Nq/p}}{|1-(w|z)|^{2Nq/p}}d\mu(w)<\infty.\end{aligned}$$

(iii)⇒(ii): Seien $\zeta\in S_N$ und $0<h<1$. Für $z:=(1-h)\zeta$ gilt $z/\|z\|=\zeta$ und $1-\|z\|=h$. Nach (2.9) haben wir $S(\zeta,h)\subset S(z)$. Die Behauptung folgt mit

$$\frac{\mu(S(\zeta,h))}{h^{Nq/p}}\le2^{Nq/p}\frac{\mu(S(z))}{(1-\|z\|^2)^{Nq/p}}.$$

(ii)⇒(i): Seien μ_1 und μ_2 die Einschränkungen von μ auf die Borel-Mengen von $(1/2)U_N$ bzw. von $U_N\setminus(1/2)U_N$. Für $0<p\le q<\infty$ und $f\in H^p$ gilt mit (3.7)

$$\begin{aligned}\int_{(1/2)U_N}|f|^qd\mu_1&\le\mu_1((1/2)U_N)(\sup_{z\in(1/2)U_N}|f(z)|^p)^{q/p}\\&\le\mu_1((1/2)U_N)\left(\sup_{z\in(1/2)U_N}\frac{2^N}{(1-\|z\|^2)^N}\|f\|_{H^p}^p\right)^{q/p}\\&\le c\mu_1((1/2)U_N)\|f\|_{H^p}^q,\end{aligned}$$

also

$$\left(\int_{1/2U_N}|f|^qd\mu_1\right)^{1/q}\le c\,\|f\|_{H^p}\tag{4.19}$$

mit einer Konstanten $c=c(N)>0$.

Die Abschätzungen für μ_2 sind schwieriger. Wähle dazu $f\in H^p$ und $a>0$. Im Falle $\{|f|\geq a\}\cap(U_N\setminus(1/2)U_N)=\emptyset$, ist $\mu_2(\{|f|\geq a\})\leq m_N(\{M_2f\geq a\})^{q/p}$ natürlich trivial. Im Falle $\{|f|\geq a\}\cap(U_N\setminus(1/2)U_N)\neq\emptyset$ wähle eine Folge $(w_n)_n$ gemäss 4.6.3. Für jedes $\zeta\in Q(w_n,1-\|w_n\|)$ ist dann w_n im Approximationsgebiet $D_2(\zeta)$. Nach 4.6.3(i) ist $|f(w_n)|\geq a$. Also haben wir $M_2f(\zeta)\geq|f(w_n)|\geq a$. Wir haben gezeigt:

$$\bigcup_n Q(w_n,(1-\|w_n\|))\subset\{M_2f\geq a\}.$$

Dabei ist M_2f die Maximalfunktion von (3.9). Da nach Wahl der Folge $(w_n)_n$ die Mengen $Q(w_n,(1-\|w_n\|))$ paarweise disjunkt sind, folgt

$$\sum_n m_N(Q(w_n,(1-\|w_n\|)))=m_N(\bigcup_n Q(w_n,(1-\|w_n\|)))\leq m_N(\{M_2f\geq a\}).\quad(4.20)$$

Weiter erhalten wir aus 4.6.3(ii), der Voraussetzung und 2.4.3

$$\begin{aligned}\mu_2(\{|f|\geq a\})&\leq\sum_n\mu_2(S(w_n,4(1-\|w_n\|)))\leq\sum_n\mu_2(S(\frac{w_n}{\|w_n\|},(1+2\sqrt{2})^2(1-\|w_n\|)))\\&\leq c\sum_n m_N(Q(\frac{w_n}{\|w_n\|},(1+2\sqrt{2})^2(1-\|w_n\|)))^{q/p}\leq c\sum_n m_N(Q(w_n,(1-\|w_n\|)))^{q/p}\\&\leq c\left(\sum_n m_N(Q(w_n,(1-\|w_n\|))\right)^{q/p}\leq c\,m_N(\{M_2f\geq a\})^{q/p}.\end{aligned}$$

Wegen der für $t>0$ gültigen Ungleichung

$$t^pm_N(\{M_2f\geq t\})=\int_{\{M_2f\geq t\}}t^pdm_N(\zeta)\leq\int_{\{M_2f\geq t\}}M_2f(\zeta)^pdm_N(\zeta)\leq\|M_2f\|^p_{L^p(m_N)}$$

ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\int_{U_N}|f|^qd\mu_2&=\int_{U_N}\int_0^{|f(z)|}qt^{q-1}dt\,d\mu_2(z)\\&=\int_0^\infty qt^{q-1}\int_{U_N}1_{\{|f|\geq t\}}(z)d\mu_2(z)dt\\&=\int_0^\infty qt^{q-1}\mu_2(\{|f|\geq t\})dt\\&\leq c\int_0^\infty qt^{q-1}m_N(\{M_2f\geq t\})^{q/p}dt\\&=c\frac{q}{p}\int_0^\infty pt^{p-1}m_N(\{M_2f\geq t)(t^pm_N(\{M_2f\geq t\}))^{(q/p)-1}dt\\&\leq c\frac{q}{p}\int_0^\infty pt^{p-1}m_N(\{M_2f\geq t\})dt\|M_2f\|^{q-p}_{L^p(m_N)}\\&=c\frac{q}{p}\|M_2f\|^p_{L^p(m_N)}\|M_2f\|^{q-p}_{L^p(m_N)}\\&\leq c\|f\|^q_{H^p}.\end{aligned}\quad(4.21)$$

Aus (4.19) und (4.21) folgt die Behauptung. ■

Ein Vergleich mit dem entsprechenden Resultat für Carleson-Masse für Bergman-Räume zeigt, dass wir die eben bewiesene Charakterisierung erhalten, indem wir in 4.2.1 formal $v = v_{-1}$ setzen.

Aus der Äquivalenz der Aussagen (iii) und (iv) des vorangehenden Satzes erhält man sofort

Korollar 4.6.5. *Sei $s \geq N$. Genau dann gilt*

$$\sup_{z\in U_N} \frac{\mu(S(z))}{(1-\|z\|^2)^s} < \infty,$$

wenn

$$\sup_{z\in U_N} \int_{U_N} \left(\frac{1-\|z\|}{|1-(w\,|\,z)|^2}\right)^s d\mu(w) < \infty.$$

Wir haben dies bereits in 4.2.4 verwendet.

Mit 4.6.4 können wir folgendes Resultat über Einbettungen von Hardy-Räumen in Bergman-Räume beweisen.

Korollar 4.6.6. *Seien $0 < p \leq q < \infty$ und $-1 < \alpha < \infty$. Genau dann gilt $H^p \hookrightarrow \mathcal{A}^q_\alpha$, wenn $N/p \leq (\alpha + N + 1)/q$.*

Beweis. Nach 3.3.6 ist $\sigma_\alpha \overset{\alpha}{\simeq} (1-\|z\|^2)^{\alpha+N+1}$, also folgt die Behauptung sofort aus 4.6.4. ■

Erneut ist dies der Grenzfall $\alpha = -1$ aus 4.3.4.

Ist μ ein Mass auf $\overline{U_N}$, so bezeichnen wir mit μ_{S_N} und μ_{U_N} die Einschränkungen von μ auf die Borel-Mengen in S_N beziehungsweise in U_N.

Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 4.6.7. *Seien $0 < p \leq q < \infty$ und μ ein Mass auf $\overline{U_N}$.*

(i) *Im Fall $p = q$ ist μ genau dann ein (p,p)-Carleson-Mass auf $\overline{U_N}$, wenn μ_{U_N} ein $(-1,p,p)$-Carleson-Mass auf U_N ist und $\mu_{S_N} = F\,dm_N$ mit einem positiven $F \in L^\infty(\Lambda_N)$ gilt.*
(ii) *Falls $p < q$, so ist μ genau dann ein (p,q)-Carleson-Mass auf $\overline{U_N}$, wenn μ_{U_N} ein $(-1,p,q)$-Carleson-Mass auf U_N ist und $\mu_{S_N} = 0$ gilt.*

Zur Vorbereitung zeigen wir

Lemma 4.6.8. *Seien $0 < p \leq q < \infty$ und μ ein (p,q)-Carleson-Mass auf $\overline{U_N}$. Dann existiert ein positives $F \in L^\infty(m_N)$ mit $\mu_{S_N} = F\,dm_N$. Für $p < q$ gilt $F = 0$.*

Wir verallgemeinern ein Argument für den Fall $p = q$ aus [Mac85].

Beweis. Seien $\zeta \in S_N$ und $0<h<1$. Mit $w:=(1-h)\zeta$ gilt für jedes $z\in Q(\zeta,h)$ $|1-(z\,|\,w)|\le 2h$ und $1-\|w\|^2\ge h$. Somit haben wir

$$\begin{aligned}\mu_{S_N}(Q(\zeta,h)) &\le (2h)^{2Nq/p}\int_{Q(\zeta,h)}\frac{1}{|1-(z\,|\,w)|^{2Nq/p}}d\mu(z)\\ &\le (2h)^{2Nq/p}\int_{\overline{U_N}}\left(\frac{1}{|1-(z\,|\,w)|^{2N/p}}\right)^q d\mu(z)\\ &\le c h^{2Nq/p}\left\|\frac{1}{(1-(\cdot\,|\,w))^{N/p}}\right\|_{H^p}^q\\ &\le c\frac{h^{2Nq/p}}{(1-\|w\|^2)^{Nq/p}}\le c\,h^{Nq/p}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Wegen $m_N(Q(\zeta,h))\simeq h^N$ (vgl. (2.10)) ist die Maximalfunktion $M\mu_{S_N}$, definiert durch

$$M\mu_{S_N}(\zeta)=\sup_{0<h<1}\frac{\mu_{S_N}(Q(\zeta,h))}{m_N(Q(\zeta,h))}\qquad(\zeta\in S_N),$$

beschränkt. Nach [Rud80] 5.2.7 existiert ein $F\in L^1(m_N)$ mit $\mu_{S_N}=F\,dm_N$. Mit einer Variante des Differentiationssatzes von Lebesgue (vgl. [Rud80] 5.3.1) folgt für fast alle $\zeta\in S_N$

$$F(\zeta)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{m_N(Q(\zeta,h))}\int_{Q(\zeta,h)}F\,dm_N=\lim_{h\to 0}\frac{\mu_{S_N}(Q(\zeta,h))}{m_N(Q(\zeta,h))}.$$

Nach (4.22) ist aber

$$\frac{\mu_{S_N}(Q(\zeta,h))}{m_N(Q(\zeta,h))}\le c\,h^{N(q/p-1)},$$

und damit ergibt sich die Behauptung. ■

Beweis von 4.6.7. Sei zuerst μ ein (p,q)-Carleson-Mass auf $\overline{U_N}$ $(p\le q)$. Wegen $\int_{U_N}|f|^q d\mu_{U_N}\le\int_{\overline{U_N}}|f^\bullet|^q d\mu$ für $f\in H^p$ ist μ_{U_N} ein $(-1,p,q)$-Carleson-Mass. Aus 4.6.8 ergibt sich $F\in L^\infty(\Lambda_N)$ für (i) und (ii).

Seien zunächst μ_{U_N} ein $(-1,p,p)$-Carleson-Mass und F wie in der Behauptung. Für $f\in H^p$ gilt

$$\int_{\overline{U_N}}|f^\bullet|^p d\mu=\int_{U_N}|f|^p d\mu_{U_N}+\int_{S_N}|f^*|^p F\,dm_N\le(c+\|F\|_\infty)\,\|f\|_{H^p}^p.$$

Ist jetzt μ ein $(-1,p,q)$-Carleson-Mass für $p<q$ und μ_{S_N}=0, so erhalten wir für $f\in H^p$

$$\int_{\overline{U_N}}|f^\bullet|^q d\mu=\int_{U_N}|f|^q d\mu_{U_N}\le c\,\|f\|_{H^p}^q$$

und sind wiederum fertig. ■

Wir kommen jetzt zum Fall $p>q$. Zunächst betrachten wir Masse auf U_N.

Satz 4.6.9. *Seien $p>q$ und $\delta>0$. Genau dann ist μ ein $(-1,p,q)$-Carleson-Mass, wenn*

$$\int_{S_N}\left(\int_{D_\delta(\zeta)}\frac{1}{(1-\|z\|^2)^N}d\mu(z)\right)^{p/(p-q)}dm_N(\zeta)<\infty.$$

Für $N=1$ geht dieses Resultat auf [Vid88] zurück.

Beweis der Notwendigkeit. Sei die Bedingung erfüllt. Dann gilt wegen 4.6.2 und (2.12) für jede Funktion f in H^p

$$\begin{aligned}
\int_{U_N} |f(z)|^q d\mu(z) &\leq c\int_{U_N} |f(z)|^q \frac{m_N(Q(z,(\alpha/2)(1-\|z\|^2)))}{(1-\|z\|^2)^N} d\mu(z)\\
&= c\int_{S_N}\int_{U_N} 1_{Q(z,(\alpha/2)(1-\|z\|^2))}(\zeta)\frac{|f(z)|^q}{(1-\|z\|^2)^N} d\mu(z)dm_N(\zeta)\\
&= c\int_{U_N}\int_{S_N} 1_{D_\alpha(\zeta)}(z)\frac{|f(z)|^q}{(1-\|z\|^2)^N} dm_N(\zeta)d\mu(z)\\
&= c\int_{U_N}\int_{D_\alpha(\zeta)} \frac{|f(z)|^q}{(1-\|z\|^2)^N} dm_N(\zeta)d\mu(z)\\
&\leq c\int_{S_N} (M_\alpha f(\zeta))^q\int_{D_\alpha(\zeta)} \frac{1}{(1-\|z\|^2)^N} d\mu(z)dm_N(\zeta)\\
&\leq c\left(\int_{S_N} (M_\alpha f(\zeta))^p dm_N(\zeta)\right)^{q/p}\left(\int_{S_N}\left(\int_{D_\alpha(\zeta)} \frac{1}{(1-\|z\|^2)^N} d\mu(z)\right)^{p/(p-q)} dm_N(\zeta)\right)^{(p-q)/p}\\
&\leq c\|f\|_{H^p}^q\left(\int_{S_N}\left(\int_{D_\alpha(\zeta)} \frac{1}{(1-\|z\|^2)^N} d\mu(z)\right)^{p/(p-q)} dm_N(\zeta)\right)^{(p-q)/p}.
\end{aligned}$$

Also ist μ ein $(-1,p,q)$-Carleson-Mass. ■

Um zu beweisen, dass die Bedingung auch hinreichend ist, müssen wir etwas ausholen. Wie beim Beweis der analogen Aussage für Bergman-Räume werden wir die Khinchin-Ungleichung verwenden. Eine zentrale Rolle spielen die sogenannten T-Räume („tent spaces“), die wir als erstes definieren. Für Details und Beweise der nachfolgend aufgeführten Ergebnisse verweisen wir insbesondere auf [CO97].

- Für $0<r,s<\infty$ und ein Mass ν auf U_N sei

  $$\boldsymbol{A_{r,\nu}(f)(\zeta)} := \left(\int_{D_\delta(\zeta)} |f(z)|^r d\nu(z)\right)^{1/r}, \quad \zeta \in S_N.$$

  Für $r=\infty$ setzen wir

  $$\boldsymbol{A_{\infty,\nu}(f)(\zeta)} := \nu\text{- ess-sup}_{z\in D_\delta(\zeta)} |f(z)|, \quad \zeta \in S_N.$$

- Für $\beta>0$ und eine Menge $A\subset S_N$ sei das „Zelt“ (tent) über A durch

  $$T^\beta(A) := U_N \setminus \bigcup_{\zeta\notin A} D_\beta(\zeta)$$

  definiert.

- Der T-Raum $\boldsymbol{T_r^s(\nu)}$ besteht aus ν-Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen $f: U_N \to \mathbb{C}$, welche die Bedingung

  $$A_{r,\nu}(f) \in L^s(m_N)$$

erfüllen. Die $min\{s,1\}$-Norm für ein $f \in T_r^s(\nu)$ wird durch

$$\|f\|_{T_r^s(\nu)} = \|A_{r,\nu}(f)\|_{L^s(m_N)}$$

gegeben. Ist $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{z_k}$ mit einer separierten Folge $(z_k)_k$ in U_N, so schreiben wir auch $T_r^s(z_k)$ anstelle von $T_r^s(\nu)$, und eine Funktion $g \in T_r^s(z_k)$ notieren wir als Folge $(c_k)_k$ mit $c_k = g(z_k)$.

Satz 4.6.10 ([CO97], Lemma 3.1)**.** *Seien $\lambda \in \mathbb{N}$ und $0 < p < \infty$. Im Falle $p > 2$ sei zusätzlich $N + \lambda + 1 > 2N/p$ erfüllt. Ist $(z_k)_k$ eine separierte Folge in U_N, so ist*

$$\Psi_\lambda : T_2^p(z_k) \to H^p : (c_k)_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(1 - \|z_k\|^2)^{N+\lambda+1}}{(1 - (z \mid z_k))^{N+\lambda+1}}$$

ein wohldefinierter und beschränkter Operator.

Aus [CO97] übernehmen wir ferner

Satz 4.6.11. *Seien $2 \leq q < p$. Falls*

$$\int_{U_N} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \|z_k\|^2)^{2(N+\lambda+1)}}{|1 - (z \mid z_k)|^{2(N+\lambda+1)}} c_k \right)^{q/2} d\mu(z) \leq \|(c_k)_k\|_{T_2^p(z_k)}^q \tag{4.23}$$

für alle Folgen $(c_k)_k$ in $T_2^p(z_k)$ und $q \geq 2$ gilt, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\int_{S_N} \left(\sup_{z \in D_\delta(\zeta)} \frac{\mu(T^\beta(Q(z_0, \delta(1 - \|z\|))))}{(1 - \|z\|^2)^N} \right)^{p/(p-q)} dm_N(\zeta) < \infty. \tag{4.24}$$

Satz 4.6.12. *Seien $2 \leq q < p$. Erfüllt ein Mass $\mu \geq 0$ auf U_N die Bedingung (4.24), so gilt auch*

$$\int_{S_N} \left(\int_{D_\delta(\zeta)} \frac{d\mu(z)}{(1 - \|z\|)^N} \right)^{p/(p-q)} dm_N(\zeta) < \infty \tag{4.25}$$

Damit verfügen wir über alle Hilfsmittel, um den Beweis von 4.6.9 zu beenden.

Abschluss des Beweises von 4.6.9. Seien zuerst $p > q \geq 2$ und μ ein $(-1, p, q)$-Carleson-Mass. Wähle eine separierte Folge $(z_k)_k$ in U_N. Sei $g \in T_2^p(z_k)$. Dann gilt wegen 4.6.10

$$\begin{aligned} \int_{U_N} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(1 - \|z_k\|)^{N+\lambda+1}}{(1 - (z \mid z_k))^{N+\lambda+1}} \right|^q d\mu(z) &\leq c \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(1 - \|z_k\|)^{N+\lambda+1}}{(1 - (z \mid z_k))^{N+\lambda+1}} \right\|_{H^p}^q \\ &\leq c \|(c_k)_k\|_{T_2^p(z_k)}^q \\ &= c \left(\int_{S_N} \left(\sum_{z_k \in D_\delta(\zeta)} |c_k|^2 \right)^{p/2} dm_N(\zeta) \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Setzt man $c_k = r_k(t)$ (Rademacher-Funktionen), integriert nach t und wendet den Satz von Fubini an, so erhält man mit der Khinchin-Ungleichung (vgl. auch den Beweis von 4.2.5)

$$\begin{aligned}
\|(c_k)_k\|^q_{T_2^p(z_k)} &= \left(\int_{S_N} \left(\sum_{z_k \in D_\delta(\zeta)} |c_k|^2 \right)^{p/2} dm_N(\zeta) \right)^{q/p} \\
&\geq c \int_{U_N} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^\infty c_k r_k(t) \frac{(1-\|z_k\|)^{N+\lambda+1}}{(1-(z|z_k))^{N+\lambda+1}} \right|^q dt\, d\mu(z) \qquad (4.26) \\
&\geq c \int_{U_N} \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{(1-\|z_k\|^2)^{2(N+\lambda+1)}}{|1-(z|z_k)|^{2(N+\lambda+1)}} c_k \right)^{q/2} d\mu(z).
\end{aligned}$$

Dies ist (4.23) aus 4.6.11. Somit erfüllt μ auch (4.25) und wir sind mit 4.6.12 für $q \geq 2$ fertig.

Für den allgemeinen Fall $p > q$ wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nq \geq 2$. Weil $np/(np-nq) = p/(p-q)$ ist, sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass jedes $(-1, p, q)$-Carleson-Mass auch ein $(-1, np, nq)$-Carleson-Mass ist. Dies ist aber einfach. Sei $f \in H^{np}$. Weil $f^n \in H^p$ mit $\|f^n\|_{H^p} = \|f\|^n_{H^{np}}$ ist, haben wir nämlich

$$\left(\int_{U_N} |f|^{nq} d\mu \right)^{1/(qn)} = \left(\int_{U_N} |f^n|^q d\mu \right)^{1/q \cdot 1/n} \leq c\, \|f^n\|^{1/n}_{H^p} = c\, \|f\|_{H^{np}}.$$

■

5. Kompakte Carleson-Einbettungen

5.1. Grundbegriffe

Nachdem wir ausführlich über die Charakterisierungen von Carleson-Einbettungen gesprochen haben, wenden wir uns der Frage der Zugehörigkeit dieser Einbettungen zu weiteren Banach-Idealen zu. Wir legen zuerst einige allgemeinen Notationen fest.

Sei dazu $\mathcal{A}$ ein (Links-)Banach-Ideal. Weiter seien v ein D-Gewicht und $1 \leq p,q < \infty$. Falls ein Mass μ auf U_N ein (v,p,q)-Carleson-Mass ist und zusätzlich der Operator $I : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ zu $\mathcal{A}(\mathcal{A}_v^p, L^q(\mu))$ gehört, schreiben wir in der Folge $I \in \mathcal{A}(\mathcal{A}_v^p, L^q(\mu))$.

5.2. Kompaktheit

Wir formulieren und beweisen zunächst Charakterisierungen der Kompaktheit der Carleson-Einbettungen. Die Idee, dass man dafür einfach die O-Bedingungen für die Stetigkeit durch die entsprechenden o-Bedingungen zu ersetzen hat, kann nur in beschränktem Umfang und unter zusätzlichen Voraussetzungen bestätigt werden. Wir beginnen mit dem einfacheren Fall $p \leq q$.

Der Fall $p \leq q$

Satz 5.2.1. *Sei v eine Gewichtsfunktion, die D^0 erfüllt, $0 < p \leq q < \infty$ und $r > 0$. Dann sind für ein (v,p,q)-Carleson-Mass μ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$I : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ ist kompakt.*

(ii) *Für jeden r-Verband $(z_n)_n$ gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu(B_r(z_n))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(z_n))^{1/p}} = 0.$

(iii) *Es existiert ein r-Verband $(z_n)_n$ mit* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu(B_r(z_n))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(z_n))^{1/p}} = 0.$

(iv) $\lim\limits_{\|z\|\to 1} \dfrac{\mu(B_r(z))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(z))^{1/p}} = 0.$

(v) $\lim\limits_{\|z\|\to 1} (B_v^{p,q,s}\mu)(z) = 0.$

Beweis. (i)⇒(v): Sei $(z_n)_n$ ein Folge in U_N mit $\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 1$. Dann konvergiert $(k_{v,s,p,z_n})_n$ in $L^q(\mu)$ gegen 0. Andernfalls existiert nämlich ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(z_{n_k})_k$ mit $\left\|k_{v,s,p,z_{n_k}}\right\|_{q,\mu} \geq \varepsilon$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da I kompakt ist, besitzt $(k_{v,s,p,z_{n_k}})_k$ eine in $L^q(\mu)$ konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert ist Null, da $k_{v,s,p,z_{n_k}}$ punktweise gegen Null konvergiert: Widerspruch. Die Behauptung (v) ergibt sich aus $|(B_v^{p,q,s}\mu)(z_{n_k})| = \left\|k_{v,s,p,z_{n_k}}\right\|_{q,\mu}^q$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

(v)⇒(iv) folgt aus

$$\frac{\mu(B_r(z))^{1/q}}{\sigma_v(B_r(z))^{1/p}} \leq c_r \left|(B_v^{p,q,s}\mu)(z)\right|,$$

was in 4.2.1 gezeigt wurde.

(iv)⇒(ii) und (ii)⇒(iii) sind offensichtlich.

(iii)⇒(i): Sei $(z_n)_n$ der r-Verband aus (iii), und sei κ dessen Überdeckungskonstante. Wegen Korollar 3.2.5 ist jede Folge in $B_{\mathcal{A}_v^p}$ auch in $\mathcal{H}(U_N)$ beschränkt und besitzt daher eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die gleichmässig auf kompakten Mengen gegen ein f aus $\mathcal{H}(U_N)$ konvergiert (normale Familie). Aus dem Lemma von Fatou folgt, dass f wieder in $B_{\mathcal{A}_v^p}$ liegt. Wir setzen $g_k := f_{n_k} - f$. Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0, so dass

$$\frac{\mu(B_r(z_n))}{\sigma_v(B_r(z_n))^{q/p}} \leq \varepsilon$$

für jedes $n \geq n_0$. Wie im Beweis von 4.2.1 folgt mit den dort verwendeten Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} |g_k(z)|^q d\mu(z) &\leq c_{r,q,p} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\mu(B_r(z_n))}{\sigma_v(B_r(z_n))^{q/p}} \left(\int_{B_{2r}(z_n)} |g_k(w)|^p d\sigma_v(w) \right)^{q/p} \\
&\leq c_{r,q,p}\varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\int_{B_{2r}(z_n)} |g_k(w)|^p d\sigma_v(w) \right)^{q/p} \\
&\leq c_{r,q,p}\varepsilon \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B_{2r}(z_n)} |g_k(w)|^p d\sigma_v(w) \right)^{q/p} \\
&\leq c_{r,q,p}\kappa\varepsilon \left(\int_{U_N} |g_k(w)|^p d\sigma_v(w) \right)^{q/p} \\
&\leq c_{r,q,p}\kappa 2^q \varepsilon = c\varepsilon
\end{aligned}$$

mit $c := c_{r,q,p}\kappa 2^q$. Weiter existiert ein k_0, so dass für jedes $k \geq k_0$

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} \int_{B_r(z_n)} |g_k(w)|^p d\mu(w) \leq \varepsilon$$

gilt, denn $(g_k)_k$ konvergiert gleichmässig auf Kompakta gegen die Nullfunktion. Für $k \geq k_0$ haben wir deshalb

$$\int_{U_N} |g_k|^q d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} |g_k|^q d\mu \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} \int_{B_r(z_n)} |g_k|^q d\mu + \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} |g_k|^q d\mu \leq \varepsilon(1+c).$$

Also ist $(g_k)_k$ eine Nullfolge in $L^p(\mu)$, und wir sind fertig. ■

Der Fall $p > q$

Hierfür sieht die Situation ganz anders aus.

Satz 5.2.2. *Seien $0<q<p<\infty$ und v eine Gewichtsfunktion, die D erfüllt. Dann ist jedes (v,p,q)-Carleson-Mass μ kompakt.*

Beweis. Da $I:\mathcal{A}_v^q \to L^q(\mu)$ beschränkt ist, gilt nach 4.2.5

$$\frac{\mu(B_r(\cdot))}{\sigma_v(B_r(\cdot))} \in L^u(\sigma_v), \tag{5.1}$$

wobei $u:=p/(p-q)$. Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $B_{\mathcal{A}_v^p}$. Wie in 5.2.1 können wir ohne Einschränkung annehmen, $(f_n)_n$ konvergiere gleichmässig auf Kompakta gegen Null. Mit 3.2.3 und dem Satz von Fubini erhalten wir für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_{U_N}|f_n|^q d\mu &\le c_r\int_{U_N}\int_{U_N}\frac{1}{\sigma_v(B_r(w))}1_{B_r(w)}(z)|f_n(z)|^q d\sigma_v(z)d\mu(w)\\ &= c_r\int_{U_N}\int_{U_N}\frac{1}{\sigma_v(B_r(w))}1_{B_r(z)}(w)|f_n(z)|^q d\mu(w)d\sigma_v(z)\\ &= c_r\int_{U_N}|f_n(z)|^q\int_{B_r(z)}\frac{1}{\sigma_v(B_r(w))}d\mu(w)d\sigma_v(z)\\ &\le c_r\int_{U_N}|f_n(z)|^q\int_{B_r(z)}\frac{1}{\sigma_v(B_r(z))}d\mu(w)d\sigma_v(z)\\ &= c_r\int_{U_N}|f_n(z)|^q\frac{\mu(B_r(z))}{\sigma_v(B_r(z))}d\sigma_v(z).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Zu $\varepsilon>0$ existiert wegen (5.1) ein $0<r_\varepsilon<1$ mit

$$\int_{U_N\setminus r_\varepsilon\overline{U_N}}\frac{\mu(B_r(z))^u}{\sigma_v(B_r(z))^u}d\sigma_v(z) \le (\varepsilon/2)^u. \tag{5.3}$$

$(f_n)_n$ konvergiert gleichmässig auf $r_\varepsilon\overline{U_N}$ gegen Null. Weiter finden wir eine natürliche Zahl n_0, so dass für alle $n\ge n_0$

$$\int_{r_\varepsilon\overline{U_N}}|f_n(z)|^p d\sigma_v(z) \le (\varepsilon/2)^{p/q}\left\|\frac{\mu(B_r(\cdot))}{\sigma_v(B_r(\cdot))}\right\|_{v,u}^{-p/q}. \tag{5.4}$$

Es ist $1/u+q/p=1$. Also erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung und (5.4)

$$\begin{aligned}\int_{r_\varepsilon\overline{U_N}}|f_n(z)|^q\frac{\mu(B_r(z))}{\sigma_v(B_r(z))}d\sigma_v(z) &= \int_{U_N}|f_n(z)|^q 1_{r_\varepsilon\overline{U_N}}(z)\frac{\mu(B_r(z))}{\sigma_v(B_r(z))}d\sigma_v(z)\\ &\le\left(\int_{r_\varepsilon\overline{U_N}}|f_n|^p d\sigma_v\right)^{q/p}\left(\int_{U_N}\frac{\mu(B_r(z))^u}{\sigma_v(B_r(z))^u}d\sigma_v(z)\right)^{1/u}\le\varepsilon/2.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Ebenso gilt wegen (5.3)

$$\begin{aligned}&\int_{U_N\setminus r_\varepsilon\overline{U_N}}|f_n(z)|^q\frac{\mu(B_r(z))}{\sigma_v(B_r(z))}d\sigma_v(z)\\ &\quad\le\left(\int_{U_N}|f_n|^p d\sigma_v\right)^{q/p}\left(\int_{U_N\setminus r_\varepsilon\overline{U_N}}\frac{\mu(B_r(z))^u}{\sigma_v(B_r(z))^u}d\sigma_v(z)\right)^{1/u}\le\varepsilon/2.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Aus (5.2), (5.5) und (5.6) ergibt sich für $n \geq n_0$

$$\int_{U_N} |f_n|^q d\mu \leq c_r \varepsilon,$$

und wir sind fertig. ■

Mindestens Teile von 5.2.2 können leichter mit funtionalanalytischen Mitteln bewiesen werden. Wir skizzieren drei Beispiele:

- *Seien v ein D-Gewicht, $1 \leq q \leq 2 < p < \infty$ und μ ein beliebiges Mass. Dann ist jeder Operator $u : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ kompakt.*

  Ein Satz von Kwapień (vgl. [Kwa70] oder [DJT95] 12.19) garantiert die Existenz einer Faktorisierung $u : \mathcal{A}_v^p \xrightarrow{w} l^2 \xrightarrow{v} L^q(\mu)$. Mit atomarer Zerlegung und dem Satz von Pitt sehen wir, dass w und somit auch u kompakt sind.

- *Seien v ein D-Gewicht, $1 \leq q$, $\max\{2, q\} < p$ und μ ein beliebiges Mass. Dann ist jeder Operator $u : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ kompakt.*

  Dies folgt sofort aus Rosenthals Erweiterung des Satzes von Pitt (vgl. 1.1.2) und atomarer Zerlegung.

- *Seien v eine Gewichtsfunktion, welche D erfüllt, $1 < p < \infty$ und μ ein (v,p,q)-Carleson-Mass. Dann ist $I : \mathcal{A}_v^p \to L^1(\mu)$ kompakt.*

  Da $\mathcal{A}_v^p$ reflexiv ist, genügt es, die Vollstetigkeit von I zu zeigen (vgl. Seite 4). Sei dazu $(f_n)_n$ eine schwache Nullfolge in $\mathcal{A}_\alpha^p$. Dann konvergiert $(f_n(z))_n$ für jedes $z \in U_N$ gegen 0. Nach dem Satz von Dunford-Pettis (vgl. z.B. [Die84] Seite 93) ist $(f_n)_n$ als schwache Nullfolge in $L^1(\mu)$ gleichgradig integrierbar, d.h. $(f_n)_n$ ist in $L^1(\mu)$ beschränkt, und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für jede messbare Menge $A \subset U_N$ mit $\mu(A) < \delta$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_A |f_n| d\mu < \varepsilon$. Mit dem Satz von Egoroff (vgl. [Rud87] Seite 73) existiert eine messbare Menge $E \subset U_N$ mit $\mu(U_N \setminus E) < \delta$, so dass $(f_n)_n$ auf E gleichmässig gegen 0 konvergiert. Wir finden ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\sup_{x \in E} |f_n(x)| < \varepsilon$ für jedes $n \geq n_\varepsilon$. Für $n \geq n_\varepsilon$ gilt

  $$\int_{U_N} |f_n| d\mu = \int_E |f_n| d\mu + \int_{U_N \setminus E} |f_n| d\mu \leq 2\varepsilon.$$

  Wir haben also $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{1,\mu} = 0$.

Weitere Fälle können durch reelle Interpolation für Operatoren zwischen (Quasi-)-Banach-Räumen abgedeckt werden. Dabei ist zu beachten, dass Kompaktheit erhalten bleibt, wenn einer der Operatoren kompakt ist, mit denen wir die Interpolation starten.

5.3. Folgerungen

Wie im Falle der Stetigkeit können wir nun die Kompaktheit von Carleson-Einbettungen mit verschiedenen Gewichten miteinander in Beziehung setzen.

Korollar 5.3.1. *Seien $s,s'>N$, v,v' Gewichte die D^0 erfüllen, $0<p\le r<\infty$ und $0<q\le t<\infty$. Falls ein $c>0$ mit*

$$c^{-1}\le \frac{v'(z)^{t/q}}{v(z)^{r/p}}\le c$$

existiert, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^p_v, L^r(\mu))$.
(ii) $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^q_{v'}, L^t(\mu))$.

Insbesondere haben wir für $v=v'$:

Korollar 5.3.2. *Sei v eine Gewichtsfunktion mit D^0, $0<p\le q<\infty$ und $0<t<\infty$. Dann gilt $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^p_v, L^q(\mu))$ genau dann, wenn $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^{tp}_v, L^{tq}(\mu))$.*

Ebenso gilt

Korollar 5.3.3. *Seien $s,s'>N,r,r'>0$, v eine Gewichtsfunktion, so dass v^r und $v^{r'}$ die Bedingung D^0 erfüllen. Falls $qr/p=q'r'/p'$, so sind äquivalent:*

(i) $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^p_{v^r}, L^q(\mu))$.
(ii) $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^{p'}_{v^{r'}}, L^{q'}(\mu))$.

Die Resultate für die Standardgewichte erhalten wir durch die Wahl $v=1-\|\cdot\|^2$ und $r=\alpha+N+1$, $r'=\alpha'+N+1$.

Korollar 5.3.4. *Seien $-1<\alpha,\alpha'<\infty$, $0<p\le p'<\infty$ und $0<q\le q'<\infty$. Gilt weiter $q(\alpha+N+1)/p=q'(\alpha'+N+1)/p'$, so sind äquivalent:*

(i) $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^p_{\alpha}, L^q(\mu))$.
(ii) $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^{p'}_{\alpha'}, L^{q'}(\mu))$.

Wie bei der Stetigkeit ist $q(\alpha+N+1)/p$ der relevante Parameter.

Für Inklusionen zwischen Bergman-Räumen erhalten wir zunächst

Korollar 5.3.5. *Seien v,v' D^0-Gewichtsfunktionen, und $0<p\le q<\infty$. Genau dann ist $I:\mathcal{A}^p_v\hookrightarrow\mathcal{A}^q_{v'}$ kompakt, wenn $\lim_{\|z\|\to 1} v'(z)^{1/q}/v(z)^{1/p}=0$.*

Weiter gilt dann speziell für die Standardgewichte:

Korollar 5.3.6. *Seien $0<p\le q<\infty$, $\alpha,\beta>-1$. Genau dann gilt $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}^p_\alpha,\mathcal{A}^q_\beta)$, wenn $(\alpha+N+1)/p<(\beta+N+1)/q$.*

$L^1(\mu)$ besitzt die Dunford-Pettis-Eigenschaft: schwach kompakte Banach-Raum-Operatoren $L^1(\mu)\to X$ sind vollstetig. Für Carleson-Einbettungen erhalten wir sogar:

Satz 5.3.7. *Seien v ein D-Gewichtsfunktion und μ ein Mass auf U_N. Existiert der Operator $I:\mathcal{A}^1_v\to L^1(\mu)$ und ist schwach kompakt, so ist er sogar kompakt.*

Beweis. Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $B_{\mathcal{A}^1_v}$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, welche gleichmässig auf Kompakta gegen ein ein $f\in\mathcal{A}^1_v$ konvergiert. Setze $g_k := f_{n_k} - f$. Nach Voraussetzung ist $\{I(g_k)\}_k$ in $L^1(\mu)$ relativ schwach kompakt und damit gleichgradig integrierbar. Zu $\varepsilon > 0$ existiert deshalb ein $\delta > 0$, so dass für jede messbare Menge $A\subset U_N$ mit $\mu(A) < \delta$ und jedes $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$\int_A |g_k| d\mu \le \varepsilon/2.$$

Da μ regulär ist, existiert eine kompakte Menge $K\subset U_N$ mit $\mu(U_N\setminus K)\le\delta$. Weiter existiert ein $k_0\in\mathbb{N}$, so dass $|g_k(z)|\le\varepsilon/2\mu(K)$ für jedes $z\in K$ und jedes $k\ge k_0$. Zusammen erhalten wir für $k\ge k_0$ $\int_{U_N}|g_k|d\mu = \int_K |g_k|d\mu + \int_{U_N\setminus K}|g_k|d\mu \le \varepsilon$. $(g_k)_k$ konvergiert also in $L^1(\mu)$ gegen 0. Damit ist I kompakt. ∎

5.4. Kompakte Carleson-Masse für $\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$

Genau wie bei der Stetigkeit können wir schliesslich die Räume $\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$ mit einbeziehen. Dazu zwei vorbereitende Lemmata.

Lemma 5.4.1. *Seien $0<r\le p\le 1$, $A\ne\emptyset$ eine beliebige Menge und X ein p-Banachraum. Genau dann ist ein beschränkter Operator $T: l^r(A)\to X$ kompakt, wenn die Menge $A_T := \{Te_x : x\in A\}$ in X relativkompakt ist.*

Beweis. Für kompakte T ist A_T offensichtlich relativkompakt. Für die andere Richtung verwenden wir $B_{l^r(A)} = \overline{\mathrm{acx}}_r\{e_x : x\in M\}$. Mit der Stetigkeit folgt

$$T(U_{l^r(A)}) = T(\overline{\mathrm{acx}}_r\{e_x : x\in A\}) \subset \overline{T(\mathrm{acx}_r\,\{e_x : x\in A\})} = \overline{\mathrm{acx}_r\, A_T} \subset \overline{\mathrm{acx}_p\, A_T},$$

und das ist relativkompakt (vgl. [Jar81] 6.7.1). ∎

Lemma 5.4.2. *Seien $-1<\alpha<\infty$ und $0<p,q<\infty$. Falls $\lim_{\|z\|\to 1}\|k_{\alpha,p,z}\|_{q,\mu} = 0$, so ist $A := \{k_{\alpha,p,z} : z\in U_N\}$ relativkompakt in $L^q(\mu)$.*

Beweis. Sei $(z_n)_n$ eine Folge in U_N. Falls eine Teilfolge (z_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty}\|z_{n_k}\| = 1$ existiert, so hat $(k_{\alpha,p,z_n})_n$ wegen der Voraussetzung die Nullfunktion als Häufungspunkt. Falls dies für keine Teilfolge gilt, existiert ein $0<R<1$ mit $\|z_n\|\le R$ für jedes $n\in\mathbb{N}$, und $(z_n)_n$ besitzt eine gegen $z\in U_N$ konvergente Teilfolge. Ohne Einschränkung sei diese Teilfolge $(z_n)_n$ selbst. Man sieht direkt, dass k_{α,p,z_n} punktweise gegen $k_{\alpha,p,z}$ konvergiert. Weiter haben wir

$$\begin{aligned}|k_{\alpha,p,z_n}(w)|^q &= \left|\frac{1-\|z_n\|^2}{(1-(w\,|\,z_n))^2}\right|^{q(\alpha+N+1)/p} \le \frac{1}{(1-\|w\|\|z_n\|)^{2q(\alpha+N+1)/p}} \\ &\le \frac{1}{(1-R)^{2q(\alpha+N+1)/p}}\end{aligned}$$

Aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgt, dass die k_{α,p,z_n} sogar in $L^q(\mu)$ gegen $k_{\alpha,p,z}$ konvergieren, und das wollten wir zeigen. ∎

Damit kommen wir zur Charakterisierung der Kompaktheit von Carleson-Einbettungen für $\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$.

Satz 5.4.3. *Seien* $0<p,q<\infty$ *und* $r\le\min\{1,q\}$. *Genau dann gilt* $I\in\mathcal{K}(\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)},L^q(\mu))$, *wenn* $\lim_{\|z\|\to 1}\|k_{\alpha,p,z}\|_{q,\mu}=0$.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, $\widetilde{I}:\mathcal{A}_\alpha^p\to L^q(\mu)$ sei nicht kompakt. Dann existieren ein $\varepsilon>0$ und eine Folge $(z_n)_n$ in U_N mit $\|k_{\alpha,p,z}\|_{q,\mu}\ge\varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Da $(k_{\alpha,p,z_n})_n$ in $\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}$ beschränkt und I kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(z_{n_k})_k$ von $(z_n)_n$, so dass $(k_{\alpha,p,z_{n_k}})_k$ gegen ein $f\in L^q(\mu)$ konvergiert. Aber $(k_{\alpha,p,z_{n_k}})_k$ strebt punktweise gegen die Nullfunktion, so dass $f=0$ sein muss: Widerspruch.

Für die andere Richtung sei $Q:l^r(U_N)\to\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}$ die durch $Qe_z=k_{\alpha,p,z}$ gegebene Surjektion. Weiter sei $T:=IQ$. Wegen Lemma 5.4.2 ist $\{Te_z:z\in U_N\}$ relativkompakt. Mit Lemma 5.4.1 können wir auf die Kompaktheit von T schliessen. Somit ist auch $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}\to L^q(\mu)$ kompakt. ∎

Daraus ergeben sich die folgenden beiden Korollare.

Korollar 5.4.4. *Seien* $0<p,q<\infty$, $r,s\le\min\{1,q\}$ *und* $t\ge r/q$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}\to L^q(\mu)$ *ist kompakt.*
(ii) $I:\mathcal{A}_\alpha^{(tp,r)}\to L^{tq}(\mu)$ *ist kompakt.*
(iii) $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,s)}\to L^q(\mu)$ *ist kompakt.*

Korollar 5.4.5. *Seien* $0<p,q<\infty$ *und* $r,s\le\min\{1,q\}$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}\to L^q(\mu)$ *ist kompakt.*
(ii) $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,s)}\to L^q(\mu)$ *ist komapkt.*

Wie bei der Stetigkeit beweist man

Satz 5.4.6. *Seien* $0<p\le q<\infty$ *und* $r\le\min\{1,q\}$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $I:\mathcal{A}_\alpha^p\to L^q(\mu)$ *ist kompakt.*
(ii) $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}\to L^q(\mu)$ *ist kompakt.*

Beweis. (i)⇒(ii) Die Behauptung für $p\ge r$ folgt sofort aus 3.5.9. Im Fall $p<r$ folgt aus Korollar 5.3.2 und (3.17) die Kompaktheit von $I:\mathcal{A}_\alpha^r=\mathcal{A}_\alpha^{(r,r)}\to L^{qr/p}(\mu)$. Ist $s=p/r$, so gilt $s\ge p/q=r/(rq/p)$. Mit Korollar 5.4.4 schliessen wir auf die Kompaktheit von $I:\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)}\to L^q(\mu)$.

(ii)⇒(i) Für $s=r/p$ gilt $s\ge r/q$. Wegen Korollar 5.4.4 und (3.17) ist die Einbettung $I:\mathcal{A}_\alpha^r=\mathcal{A}_\alpha^{(r,r)}\to L^{qr/p}(\mu)$ kompakt. Aus Korollar 5.3.2 folgt sofort (i). ∎

Anwendungen

Mit den Methoden, welche analog zu denjenigen sind, die wir in den Beweisen zur Charakterisierung von stetigen Multiplikationsoperatoren verwendet haben (vgl. Seite

71 ff.), erhalten wir die folgenden Resultate. Dabei verwenden wir wieder die bereits eingeführten Banach-Räume

$$X_v^0 := \{f : U_N \to \mathbb{C} \text{ analytisch, } : \lim_{\|z\|\to 1} |f(z)|v(z) = 0\}$$

Satz 5.4.7. *Seien $h : U_N \to \mathbb{C}$ analytisch, v und $\widetilde{v}$ Gewichtsfunktionen, welche D^0 erfüllen und $0 < p \leq q < \infty$. Weiter sei*

$$w := \frac{v^{1/q}}{\widetilde{v}^{1/p}}.$$

Dann sind äquivalent

(i) *$M_h : \mathcal{A}_v^p \to \mathcal{A}_{\widetilde{v}}^q$ ist wohldefiniert und kompakt.*

(ii) *$h \in X_w^0$.*

Satz 5.4.8. *Es sind äquivalent:*

(i) *$M_h : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ existiert als kompakter Operator.*
(ii) *$M_{|h|} : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ existiert als kompakter Operator.*
(iii) *$M_{|h|^{1/t}} : \mathcal{A}_v^{tp} \to L^{tq}(\mu)$ existiert als kompakter Operator.*

Wie schon bei der Stetigkeit ist für Kompositionsoperatoren auch bei der Kompaktheit die Übertragung der aus dem Fall einer Veränderlichen bekannten Resultate nicht ohne weiteres möglich.

Seien $N = 1$ und $\varphi : U_1 \to U_1$ eine analytische Funktion. Falls der Kompositionsoperator $C_\varphi : \mathcal{A}_\alpha^p \to \mathcal{A}_\alpha^p$ für eine Wahl der Parameter $\alpha > -1$ und $0 < p < \infty$ kompakt ist, so gilt dies auch für jede andere Wahl. Dies wird mit Hilfe einer Charakterisierung der Kompaktheit durch die Winkelableitung gezeigt. Im Fall $N \geq 2$ ist das falsch: für verschiedene Werte von $\alpha > -1$ hängen die Klassen von kompakten Kompositionsoperatoren $C_\varphi : \mathcal{A}_\alpha^p \to \mathcal{A}_\alpha^p$ von $\alpha > -1$ ab. Wir verweisen für Details auf [MS86].

Für Symbole $\varphi \in \operatorname{Aut}(U_N)$ übertragen sich jedoch wiederum die von $N = 1$ her bekannten Resultate. Eine offensichtliche Modifikation von 4.5.4 ergibt

Satz 5.4.9. *Seien $\varphi \in Aut(U_N)$, und $v, \widetilde{v}$ Gewichtsfunktionen, welche D^0 erfüllen und $0 < p \leq q < \infty$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$C_\varphi : \mathcal{A}_v^p \to \mathcal{A}_{\widetilde{v}}^q$ ist wohldefiniert und kompakt.*

(ii) $\displaystyle \lim_{\|z\|\to 1} \frac{\widetilde{v}(z)^{1/q}}{v(\varphi(z))^{1/p}} = 0.$

Für die Standardgewichte bedeutet dies:

Korollar 5.4.10. *Seien $\alpha, \beta > 0$ und $\varphi \in Aut(U_N)$ und $0 < p \leq q < \infty$. Genau dann gilt $C_\varphi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}_\alpha^p, \mathcal{A}_\beta^q)$, wenn $(\alpha + N + 1)/p < (\beta + N + 1)/q$.*

Auch die Charakterisierung kompakter Restriktionsoperatoren liefert im Fall $p \leq q$ keine Überraschung.

Korollar 5.4.11. *Seien $w=(w_n)_n$ die endliche Vereinigung von separierten Folgen in U_N, $a=(a_n)_n$ eine Zahlenfolge und v eine Gewichtsfunktion, welche D^0 erfüllt. Für $0<p\leq q<\infty$ sind äquivalent:*

(i) $R^q_{a,w}:\mathcal{A}^p_v\to l^q$ *ist wohldefiniert und kompakt.*

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{v(w_n)^{q/p}}=0.$

5.5. Hardy-Räume

Wie bei der Stetigkeit gehen wir in zwei Schritten vor. Wir beweisen zuerst die Resultate für Mass μ auf U_N und erweitern diese anschliessend auf Masse auf $\overline{U_N}$. Für ein $(-1,p,q)$-Carleson-Mass μ $(0<p\leq q<\infty)$ auf $\overline{U_N}$ wird sich zeigen, dass das Randmass μ_{S_N} verschwindet, falls die Carleson-Einbettung kompakt ist.

Für Masse auf U_N erhalten wir

Satz 5.5.1. *Sei $p\leq q$ und μ ein Mass auf U_N. Dann sind äquivalent:*

(i) $I:H^p\to L^q(\mu)$ *existiert und ist kompakt.*

(ii) *Es gilt* $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\mu(S(\zeta,h))}{h^{Nq/p}}=0$ *gleichmässig in* $\zeta\in S_N$.

(iii) $\displaystyle\lim_{\|z\|\to 1}\frac{\mu(S(z))}{(1-\|z\|^2)^{Nq/p}}=0.$

(iv) $\displaystyle\lim_{\|z\|\to 1}\int_{U_N}\left(\frac{1-\|z\|^2}{|1-(w\,|\,z)|^2}\right)^{Nq/p}d\mu(w)=0.$

Formal ist dies wieder der Fall $\alpha=-1$ in 5.2.1.

Wir verwenden im Beweis ohne spezielle Referenz die in 4.6.4 hergeleiteten Abschätzungen.

Beweis. (i)⇒(iv): Sei $(z_n)_n$ eine Folge in U_N mit $\lim_{n\to\infty}\|z_n\|=1$. Wie im Beweis von 5.2.1 zeigt man $\lim_{n\to\infty}\|k_{-1,p,z_n}\|_{q,\mu}=0$. Wegen

$$\int_{U_N}\left(\frac{1-\|z_n\|^2}{|1-(w\mid z_n)|^2}\right)^{Nq/p}d\mu(w)=\|k_{-1,p,z_n}\|_{q,\mu}$$

erhalten wir (iv).

(iv)⇒(iii): Dies folgt sofort aus

$$\frac{\mu(S(z))}{(1-\|z\|^2)^{qN/p}}\leq c\int_{U_N}\frac{(1-\|z\|^2)^{Nq/p}}{|1-(w\mid z)|^{2Nq/p}}d\mu(w).$$

(iii)⇒(ii): Wir wählen $z\in U_N$ zu gegebenem $\zeta\in S_N$ und $0<h<1$ wie in 4.6.4. Lassen wir h gegen 0 gehen, so konvergiert $\|z\|$ gegen 1. Die Behauptung folgt aus

$$\frac{\mu(S(\zeta,h))}{h^{Nq/p}}\leq c\frac{\mu(S(z))}{(1-\|z\|^2)^{qN/p}},$$

mit einer von ζ unabhängigen Konstanten $c>0$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Sei $(f_n)_n$ eine in H^p beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge, die gleichmässig auf Kompakta gegen eine analytische Funktion f konvergiert. Sei ohne Einschränkung $(f_n)_n$ selbst diese Teilfolge. Mit dem Lemma von Fatou sieht man, dass $f \in H^p$ ist. Wir können also $f=0$ annehmen.

Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $0<h_0<1$ mit $\frac{\mu(S(\zeta,h))}{h^{Nq/p}}<\varepsilon$ für alle $0<h\leq h_0$ und alle $\zeta \in S_N$. Setze $r_0:=1-h_0/(1+2\sqrt{2})^2$. Sei μ_1 die Einschränkung von μ auf die Borel-Mengen von $U_N \setminus r_0 U_N$. Da $(f_n)_n$ gleichmässig auf $r_0\overline{U_N}$ gegen Null konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\int_{r_0\overline{U_N}} |f_n|^q d\mu \leq \varepsilon$ für jedes $n \geq n_0$. Sei nun $n \geq n_0$ und $a>0$ fest gewählt. Wir behaupten, dass

$$\mu_1(\{|f_n| \geq a\}) \leq c\,\varepsilon\, m_N(\{M_2 f_n \geq a\})^{q/p}. \tag{5.7}$$

gilt. Dies ist klar, falls $\{|f_n| \geq a\} \cap (U_N \setminus r_0 U_N) = \emptyset$. Falls $\{|f_n| \geq a\} \cap (U_N \setminus r_0 U_N) \neq \emptyset$ wähle eine Folge $(w_n)_n$ wie in 4.6.3. Nach Wahl von h_0 und r_0 haben wir

$$(1+2\sqrt{2})^2(1-\|w_k\|) \leq (1+2\sqrt{2})^2(1-r_0) = h_0,$$

also

$$\mu_1(S(w_k/\|w_k\|,(1+2\sqrt{2})^2(1-\|w_k\|)) < \varepsilon((1+2\sqrt{2})^2(1-\|w_k\|))^{Nq/p}.$$

Eine offensichtliche Modifikationen des Beweises von 4.6.4 ergibt (5.7). Daraus folgt wie in 4.6.4

$$\int_{U_N} |f_n|^q d\mu_1 \leq c\,\varepsilon\, \|f_n\|_{H^p}^q$$

mit einer von $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon>0$ unabhängigen Konstanten. Insgesamt haben wir also für $n \geq n_0$

$$\int_{U_N} |f_n|^q d\mu \leq \int_{r_0 U_N} |f_n|^q d\mu + \int_{U_N \setminus r_0 U_N} |f_n|^q d\mu \leq (1+c)\varepsilon$$

$(f_n)_n$ konvergiert in $L^q(\mu)$ gegen 0. Also ist $I: H^p \to L^q(\mu)$ kompakt. ■

Satz 5.5.2. *Seien μ ein Mass auf $\overline{U_N}$ und $0<p\leq q<\infty$. Genau dann ist μ ein kompaktes (p,q)-Carleson-Mass auf $\overline{U_N}$, wenn μ_{U_N} ein kompaktes $(-1,p,q)$-Carleson-Mass auf U_N ist und $\mu_{S_N}=0$ gilt.*

Beweis. Offensichtlich ist μ ein kompaktes (p,q)-Carleson-Mass auf $\overline{U_N}$, falls μ_{U_N} ein kompaktes $(-1,p,q)$-Carleson-Mass auf U_N ist und $\mu_{S_N}=0$ gilt.

Sei also μ ein kompaktes (p,q)-Carleson-Mass auf $\overline{U_N}$. Für eine beschränkte Folge $(f_n)_n$ in H^p existieren also eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ und eine Funktion $f \in L^q(\mu)$ mit $\lim_{k\to\infty} \left\|f_{n_k}^\bullet - f\right\|_{q,\mu}=0$. Wegen $\|f_{n_k}-f\|_{q,\mu_{U_N}} \leq \left\|f_{n_k}^\bullet - f\right\|_{q,\mu}$ ist μ_{U_N} ein $(-1,p,q)$-Carleson-Mass.

Seien $\zeta \in S_N$ und $(h_n)_n$ eine Folge in $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} h_n=1$. Setze $w_n=(1-h_n)\zeta$. Da $\{k_{-1,p,w_n} : n \in \mathbb{N}\}$ in H^p beschränkt ist, können wir wegen der Kompaktheit von $I: H^p \to L^q(\mu)$ ohne Einschränkung annehmen, es gelte $\lim_{n\to\infty} \|k_{-1,p,w_n}\|_{q,\mu}=0$. Wie in 4.6.8 ist

$$\frac{\mu(Q(\zeta,h_n))}{m_N(Q(\zeta,h_n))} \leq 2^{Nq/p} h_n^{N(q/p-1)} \|k_{-1,p,w_n}\|_{q,\mu}.$$

Ist $\mu_{S_N} = F dm_N$ (vgl. 4.6.8), so gilt für fast alle $\zeta \in S_N$ mit dem Differentiationssatz von Lebesgue (vgl. die Überlegungen auf Seite 82)

$$F(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(Q(\zeta, h_n))}{m_N(Q(\zeta, h_n))} = 0.$$

$\blacksquare$

6. Ordnungsbeschränkte und summierende Carleson-Einbettungen

6.1. Ordnungsbeschränktheit

Wir wenden uns nun den ordnungsbeschränkten Carleson-Einbettungen $I : \mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ für D-Gewichte zu. Der Fall $N = 1$ wurde für Standardgewichte schon in [Dom97] und [Dom98] behandelt.

Satz 6.1.1. *Seien v eine D-Gewichtsfunktion, μ ein Mass auf U_N und $0 < p, q < \infty$. Dann sind äquivalent:*

(i) $I : \mathcal{A}^p_v \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*
(ii) $\frac{1}{v^{1/p}} \in L^q(\mu)$.
(iii) $I : \widehat{X}_{v^{1/p}} \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*
(iv) $I : \widehat{X}_{v^{1/p}} \to L^q(\mu)$ *existiert als beschränkter Operator.*
(v) $I : X_{v^{1/p}} \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*

Beweis. (i)⇒(ii): Lemma 3.3.11 garantiert die Existenz einer Konstanten $c > 0$ mit $k_{v,s,p,z} \in cB_{\mathcal{A}^p_v}$ für jedes $z \in U_N$. Wegen der Voraussetzung finden wir eine Funktion $0 \le g \in L^q(\mu)$, so dass $|f(w)| \le g(w)$ für jedes $f \in cB_{\mathcal{A}^p_v}$ und jedes $w \in U_N$ gilt. Insbesondere haben wir $|k_{v,s,p,z}(w)| \le g(w)$ für alle $z, w \in U_N$. Für $z = w$ erhalten wir

$$g(z) \ge \frac{(1 - \|z\|^2)^{s/p}}{v(z)^{1/p}(1 - \|z\|^2)^{s/p}} = \frac{1}{v(z)^{1/p}}.$$

Somit gilt (ii).

(ii)⇒(iii): Aus

$$|f(w)| = |f(w)| v(w)^{1/p} v(w)^{-1/p} \le \frac{1}{v(w)^{1/p}} \quad \forall f \in U_{\widehat{X}_v},$$

folgt mit unserer Voraussetzung, dass $I : \widehat{X}_v \to L^q(\mu)$ ordnungsbeschränkt ist.

(iii)⇒(iv) ist trivial.

(iv)⇒(ii) Für $f(w) := v(w)^{-1/p} \in U_{\widehat{X}_v}$ gilt

$$\int_{U_N} \frac{1}{v^{q/p}} d\mu = \|f\|^q_{q,\mu} \le \|I\|^q < \infty.$$

Also ist $v^{-1/p} \in L^q(\mu)$. (iii)⇒(v)⇒(i) ergeben sich aus $\mathcal{A}^p_v \hookrightarrow X_{v^{1/p}} \hookrightarrow \widehat{X}_{v^{1/p}}$. ■

Inbesondere haben wir im beschriebenen Fall eine Faktorisierung

$$\mathcal{A}^p_v \hookrightarrow X_{v^{1/p}} \hookrightarrow \widehat{X}_{v^{1/p}} \hookrightarrow L^q(\mu).$$

Wieder können auch die Räume $\mathcal{A}^{(p,r)}_\alpha$ mit einbezogen werden.

Korollar 6.1.2. *Seien* $-1 \le \alpha < \infty$, $r \le p < \infty$ *und* $0 < q < \infty$. *Genau dann ist die Einbettung* $I : \mathcal{A}_\alpha^{(p,r)} \to L^q(\mu)$ *ordnungsbeschränkt, wenn*

$$\frac{1}{(1 - \|z\|^2)^{(\alpha+N+1)/p}} \in L^q(\mu). \tag{6.1}$$

BEWEIS. Gilt (6.1), so ist wegen 6.1.1 und $\mathcal{A}_\alpha^{(p,r)} \subset \mathcal{A}_\alpha^p$ die formale Idendität $I : \mathcal{A}_\alpha^{(p,r)} \to L^q(\mu)$ ordnungsbeschränkt. Umgekehrt erhalten wir (6.1) aus der Ordnungsbeschränktheit von $I : \mathcal{A}_\alpha^{(p,r)} \to L^q(\mu)$ wie im Schritt (i)⇒(ii) des Beweises von 6.1.1. ∎

Ersetzt man im Beweis von 6.1.1 $k_{v,s,p,z}$ durch $k_{-1,p,z}$, so erhält man direkt das entsprechende Resultat für Hardy-Räume:

Satz 6.1.3. *Seien* $0 < p, q < \infty$, $0 < r < \min\{1, q\}$ *und* $v(z) := (1 - \|z\|^2)^N$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $I : H^p \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungbeschränkter Operator.*
(ii) $I : \mathcal{A}_{-1}^{(p,r)} \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungbeschränkter Operator.*
(iii) $\frac{1}{v^{1/p}} \in L^q(\mu)$.
(iv) $I : \widehat{X}_{v^{1/p}} \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*
(v) $I : \widehat{X}_{v^{1/p}} \to L^q(\mu)$ *existiert als beschränkter Operator.*
(vi) $I : X_{v^{1/p}} \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*

Dies ist also erneut gerade der Grenzfall $\alpha = -1$.

Betrachten wir Masse auf $\overline{U_N}$, so erhalten wir

Satz 6.1.4. *Seien* $0 < p, q < \infty$ *und* μ *ein Mass auf* $\overline{U_N}$. *Genau dann ist* μ *ein ordnungsbeschränktes* (p, q)*-Carleson-Mass auf* $\overline{U_N}$, *wenn* μ_{U_N} *ein ordnungsbeschränktes* $(-1, p, q)$*-Carleson-Mass auf* U_N *ist und* $\mu_{S_N} = 0$ *gilt.*

BEWEIS. Falls μ ein ordnungsbeschränktes Carleson-Mass auf $\overline{U_N}$ ist, so erhalten wir wie in 6.1.1, dass ein $g \in L^q(\mu)$ existiert mit $1/(1 - \|z\|^2)^N \le g(z)$ für jedes $z \in \overline{U_N}$. Dies gilt insbesondere für $z \in U_N$. Da $g|_{U_N} \in L^q(\mu_{U_N})$ gilt, folgt direkt aus 6.1.1, dass μ_{U_N} ein ordnungsbeschränktes (p, q)-Carleson-Mass auf U_N ist.

Sei nun $\zeta \in S_N$. Für jedes $z \in D_2(\zeta)$ haben wir

$$g(\zeta) \ge |k_{-1,p,z}(\zeta)| = \left| \frac{1}{(1 - (\zeta \mid z))^N} \right| \ge \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^N}.$$

Lassen wir z in $D_2(\zeta)$ gegen ζ konvergieren, so erhalten wir $g(\zeta) = \infty$. Nur für $\mu_{S_N} = 0$ kann $g \in L^q(\mu_{S_N})$ gelten.

Sei umgekehrt μ_{U_N} ein ordnungbeschränktes $(-1, p, q)$-Carleson-Mass auf U_N und $\mu_{S_N} = 0$. Dann existiert ein $g \in L^q(\mu_{U_N})$, so dass $|f(z)| \le g(z)$ für alle $z \in U_N$. Setzen wir g durch $g(\zeta) = \infty$ auf S_N fort, so gilt $g \in L^q(\mu)$. Für jedes $f \in H^p$ haben wir $|f^\bullet| \le g$ und sind fertig. ∎

Die ordnungsbeschränkten Operatoren bilden kein Operatorenideal, was die Anwendung der Resultate über die kanonischen Einbettungen auf gewichtete Kompositionsoperatoren auszuschliessen scheint. Mit einem zusätzlichen Argument sehen wir aber, dass die Resultate sich dennoch übertragen lassen.

Satz 6.1.5. *Seien v eine Gewichtsfunktion mit D, μ ein Mass auf U_N, $0<p,q<\infty$, $\varphi: U_N \to U_N$ analytisch und $h: U_N \to \mathbb{C}^N$ messbar. Für $\nu = |h|^{1/q}(d\mu\varphi^{-1})$ sind äquivalent:*

(i) *Der gewichtete Kompositionsoperator $hC_\varphi : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ existiert und ist ordnungsbeschränkt.*

(ii) *$I: \mathcal{A}_v^p \to L^q(\nu)$ existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*

Beweis. (i)⇒(ii): Wegen 3.3.11 existiert ein $c>0$ mit $k_{v,s,p,z} \in cU_{\mathcal{A}_v^p}$ für jedes $z \in U_N$. Da hC_φ ordnungsbeschränkt ist, existiert ein $0 \le g \in L^q(\mu)$, so dass für jedes $z,w \in U_N$

$$\left| h(w) \frac{(1-\|\varphi(z)\|^2)^{s/p}}{v(\varphi(z))^{1/p}(1-(\varphi(w)\,|\,\varphi(z)))^{s/p}} \right| = |(hC_\varphi k_{v,s,p,\varphi(z)})(w)| \le g(w).$$

Inbesondere haben wir

$$\left| \frac{h(w)}{v(w)^{1/p}} \right| = \left| h(w) \frac{(1-\|\varphi(w)\|^2)^{s/p}}{v(\varphi(w))^{1/p}(1-\|\varphi(w)\|^2)^{s/p}} \right| \le g(w),$$

was zu (ii) äquivalent ist.

(ii)⇒(i): Wegen $\mathcal{A}_v^p \hookrightarrow X_{v^{1/p}}$ gilt mit einer Konstanten $c>0$ für jedes $f \in U_{\mathcal{A}_v^p}$ und jedes $w \in U_N$

$$\begin{aligned} |(hC_\varphi f)(w)| &= |h(w) f(\varphi(w))| = \left| \frac{h(w)}{v(\varphi(w))^{1/p}} f(\varphi(w)) v(\varphi(w))^{1/p} \right| \\ &\le c \left| \frac{h(w)}{v(\varphi(w))^{1/p}} \right| \in L^q(\mu); \end{aligned}$$

$hC_\varphi : \mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ existiert daher als ordnungsbeschränkter Operator. ■

Folgende Aussagen ergeben sich direkt aus 6.1.1.

Korollar 6.1.6. *Seien v und v' Gewichtsfunktionen, die D erfüllen, $0<p,q<\infty$ und $1<r,t<\infty$. Falls ein $c>0$ mit*

$$\frac{1}{c} \le \frac{v'(z)^{t/q}}{v(z)^{r/p}} \le c \text{ für alle } z \in U_N$$

existiert, sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *$I: \mathcal{A}_v^p \to L^r(\mu)$ existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*
(ii) *$I: \mathcal{A}_{v'}^q \to L^t(\mu)$ existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*

Speziell für $v = v'$ erhalten wir

Korollar 6.1.7. *Seien v ein D-Gewicht, $0<p,q<\infty$, und $0<t<\infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $I:\mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ *ist definiert und ordnungsbeschränkt.*
(ii) $I:\mathcal{A}_v^{tp} \to L^{tq}(\mu)$ *ist definiert und ordnungsbeschränkt.*

Damit erhalten wir nun unmittelbar, dass jedes ordnungsbeschränkte (v,p,q)-Carleson-Mass μ auf U_N kompakt ist $(0<p,q<\infty)$. Wegen 5.3.2 und 6.1.7 können wir ohne Einschränkung $p=2$ annehmen. Wegen der Reflexivität von $\mathcal{A}_v^2$ müssen wir nur zeigen, dass $I:\mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ vollstetig ist. Dies gilt aber nach 1.2.1.

Weiter folgt

Korollar 6.1.8. *Seien $r,r'>0$, v eine Gewichtsfunktion, so dass v^r und $v^{r'}$ die Bedingung D erfüllen. Falls $r/p=r'/p'$, dann sind äquivalent:*

(i) $I:\mathcal{A}_{v^r}^p \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*
(ii) $I:\mathcal{A}_{v^{r'}}^{p'} \to L^q(\mu)$ *existiert als ordnungsbeschränkter Operator.*

Für die Standardgewichte bedeutet dies

Korollar 6.1.9. *Seien $-1<\alpha,\alpha'<\infty$ und $0<p,p',q,q'<\infty$. Falls $q(\alpha+N+1)/p=q'(\alpha'+N+1)/p'$, dann sind äquivalent:*

(i) $I:\mathcal{A}_\alpha^p \to L^q(\mu)$ *ist wohldefiniert und ordnungsbeschränkt.*
(ii) $I:\mathcal{A}_{\alpha'}^{p'} \to L^{q'}(\mu)$ *ist wohldefiniert und ordnungsbeschränkt.*

Insbesondere können wir in vielen Fällen eine Reduktion auf Hilbert-Räume durchführen.

Korollar 6.1.10. *Seien $0<p,q<\infty$, v ein D-Gewicht und μ ein Mass.*

(i) *Sei zusätzlich $d\nu := v^{1-(q/p)}d\mu$ ein endliches Mass. Genau dann ist die Einbettung $I:\mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ definiert und ordnungsbeschränkt, wenn $I:\mathcal{A}_v^2 \to L^q(\nu)$ als Hilbert-Schmidt-Operator existiert.*
(ii) *Falls $v^{q/p}$ ein D-Gewicht ist, so existiert $I:\mathcal{A}_v^p \to L^q(\mu)$ genau dann als ordnungsbeschränkter Operator, wenn $I:\mathcal{A}_{v^{q/p}}^2 \to L^2(\mu)$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.*

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich aus 6.1.3 und

$$\int_{U_N} \left(\frac{1}{v^{1/p}}\right)^q d\mu = \int_{U_N} \left(\frac{1}{v^{1/2}}\right)^2 v^{1-(q/p)} d\mu,$$

die zweite ebenso mit

$$\int_{U_N} \left(\frac{1}{v^{1/p}}\right)^q d\mu = \int_{U_N} \left(\frac{1}{v^{(q/p)/2}}\right)^2 d\mu.$$

■

Die zweite Aussage vereinfacht sich für Standardgewichte v_α zu

Korollar 6.1.11. *Seien $0<p,q<\infty$ und $-1<\alpha<\infty$. Falls $\alpha' := q(\alpha+N+1)/p - N-1>-1$, so ist $I:\mathcal{A}_\alpha^p \to L^q(\mu)$ genau dann wohldefiniert und ordnungsbeschränkt,* *wenn dies für $I:\mathcal{A}^2_{\alpha'}\to L^2(\mu)$ gilt, d.h wenn $I:\mathcal{A}^2_{\alpha'}\to L^2(\mu)$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.*

Bemerkung 6.1.12. Die Voraussetzung in 6.1.10(i) ist im Fall $p\le q$ für alle (v,p,q)-Carleson-Masse μ erfüllt. Setzen wir allgemeiner $d\nu := v^{(q'/p')-(q/p)}d\mu$ für $p\le q$, $p'\le q'$, so gilt für alle $0<r<\infty$ und jedes $z\in U_N$

$$\begin{aligned}\frac{\mu(B_r(z))^{1/q}}{v(z)^{1/p}} &= \left(\frac{\mu(B_r(z))^{1/q'}}{v(z)^{q/(pq')}}\right)^{q'/q} = \left(\frac{v(z)^{(1/p')-(q/(pq'))}\mu(B_r(z))^{1/q'}}{v(z)^{1/p'}}\right)^{q'/q}\\ &= \left(\frac{1}{v(z)^{1/p'}}\left(\int_{B_r(z)} v(z)^{(q'/p')-(q/p)}d\mu(w)\right)^{1/q'}\right)^{q'/q}\\ &\simeq \left(\frac{1}{v(z)^{1/p'}}\left(\int_{B_r(z)} v(w)^{(q'/p')-(q/p)}d\mu(w)\right)^{1/q'}\right)^{q'/q} = \left(\frac{\nu(B_r(z))^{1/q'}}{v(z)^{1/p'}}\right)^{q'/q}.\end{aligned}$$

ν ist ein (v,p',q')-Carleson-Mass und somit endlich (vgl. 4.2.1).

Weitere Konsequenzen ergeben sich für Einbettungen zwischen Bergman-Räumen. Dabei nennen wir $I:\mathcal{A}^p_v\hookrightarrow\mathcal{A}^q_{v'}$ ordnungsbeschränkt, falls $\mathcal{A}^p_v\hookrightarrow\mathcal{A}^q_{v'}\subset L^q(\sigma_{v'})$ ordnungbeschränkt ist.

Korollar 6.1.13. *Seien v und v' D-Gewichtsfunktionen. Für $0<p,q<\infty$ existiert $I:\mathcal{A}^p_v\hookrightarrow\mathcal{A}^q_{v'}$ genau dann und ist ordnungsbeschränkt, wenn $v^{1/p}/(v')^{1/q}$ zu $L^p(\Lambda_N)$ gehört.*

Speziell für die Standardgewichte liefert das

Korollar 6.1.14. *Seien $-1<\alpha,\beta<\infty$ und $0<p,q<\infty$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$I:\mathcal{A}^p_\alpha\hookrightarrow\mathcal{A}^q_\beta$ ist wohldefiniert und ordnungsbeschränkt.*
(ii) $(\alpha+N+1)/p<(\beta+1)/q$

Man sieht leicht, dass die Aussage auch für Hardy-Räume richtig ist, wenn man wieder $\alpha=-1$ setzt.

Die Komposition uv eines ordnungsbeschränkten Operators v mit einem beschränkten Operator u ist im Allgemeinen nicht ordnungsbeschränkt: die ordnungsbeschränkten Operatoren bilden nur ein Linksideal. Für die formalen Identitäten erhalten wir trotzdem

Satz 6.1.15. *Seien v und v' D-Gewichtsfunktionen, und seien $0<p_1,p_2,q<\infty$. Seien weiter $I_1:\mathcal{A}^{p_1}_{v'}\hookrightarrow\mathcal{A}^{p_2}_v\subset L^{p_2}(\sigma_v)$ und $I_2:\mathcal{A}^{p_2}_v\to L^q(\mu)$ Carleson-Einbettungen. Mit I_1 ist auch $I:\mathcal{A}^{p_1}_{v'}\to L^q(\mu)$ ordnungsbeschränkt.*

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall $p_2 \le q$. Sei $(z_n)_n$ ein r-Verband mit Überdeckungskonstante κ. Wir erhalten mit 3.3.4 und 4.2.1

$$\int_{U_N} \frac{d\mu(z)}{v'(z)^{q/p_1}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} \frac{d\mu(z)}{v'(z)^{q/p_1}} \le c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(z_n)^{q/p_2}}{v'(z_n)^{q/p_1}} \frac{\mu(B_r(z_n))}{v(z_n)^{q/p_2}} \le c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(z_n)^{q/p_2}}{v'(z_n)^{q/p_1}}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(z_n)^{q/p_2}}{v'(z_n)^{q/p_1}} &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(z_n)}{v'(z_n)^{p_2/p_1}}\right)^{q/p_2} \le c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(z_n)}{v'(z_n)^{p_2/p_1}} \int_{B_r(z_n)} d\Lambda_N(z)\right)^{q/p_2} \\ &\le c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_r(z_n)} \frac{v(z)}{v'(z_n)^{p_2/p_1}} d\Lambda_N(z)\right)^{q/p_2} \\ &\le c\kappa^{q/p_2} \left(\int_{U_N} \frac{v(z)}{v'(z_n)^{p_2/p_1}} d\Lambda_N(z)\right)^{q/p_2}.\end{aligned}$$

Dies ist wegen Korollar 6.1.13 endlich. Die Behauptung folgt nun aus 6.1.1.

Für $p_2 > q$ erhalten wir mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{U_N} \frac{1}{v'(z)^{q/p_1}} d\mu(z) &= \int_{U_N} \int_{U_N} \frac{1}{v'(z)^{q/p_1}} \cdot \frac{1}{\sigma_v(B_r(z))} 1_{B_r(z)}(w) d\mu(z) d\sigma_v(w) \\ &= \int_{U_N} \int_{B_r(w)} \frac{1}{v'(z)^{q/p_1}} \cdot \frac{1}{\sigma_v(B_r(z))} d\mu(z) d\sigma_v(w).\end{aligned}$$

Mit 3.3.4, der Ungleichung von Hölder (mit p_2/q und $p_2/(p_2-q)$) und 4.2.5 ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{U_N} \frac{1}{v'(z)^{q/p_1}} d\mu(z) &\le c \int_{U_N} \int_{B_r(w)} \frac{1}{v'(w)^{q/p_1}} \cdot \frac{1}{\sigma_v(B_r(w))} d\mu(z) d\sigma_v(w) \\ &= c \int_{U_N} \frac{1}{v'(w)^{q/p_1}} \cdot \frac{\mu(B_r(w))}{\sigma_v(B_r(w))} d\sigma_v(w) \\ &\le c \left(\int_{U_N} \frac{1}{v'(w)^{p_2/p_1}} d\sigma_v(w)\right)^{q/p_2} \left(\int_{U_N} \frac{\mu(B_r(w))^{p_2/(p_2-q)}}{\sigma_v(B_r(w))^{p_2/(p_2-q)}} d\sigma_v(w)\right)^{(p_2-q)/p_2} \\ &\le c \left(\int_{U_N} \frac{1}{v'(w)^{p_2/p_1}} d\sigma_v(w)\right)^{q/p_2} = c \left(\int_{U_N} \frac{v(w)}{v'(w)^{p_2/p_1}} d\Lambda_N v(w)\right)^{q/p_2},\end{aligned}$$

und dies ist wegen Korollar 6.1.13 beschränkt. Aus 6.1.1 folgt die Behauptung. ∎

Wir halten noch eine Konsequenz von 6.1.1 für Kompositionsoperatoren fest:

Korollar 6.1.16. *Seien $\varphi : U_N \to U_N$ analytisch, v und $\widetilde{v}$ D-Gewichtsfunktionen und $0 < p, q < \infty$. Genau dann ist der Kompositionsoperator $C_\varphi : \mathcal{A}_v^p \to \mathcal{A}_{\widetilde{v}}^q$ ordnungsbeschränkt, wenn $\dfrac{\widetilde{v}}{(v \circ \varphi)^{q/p}} \in L^1(\Lambda_N)$.*

Für die Standardgewichte erhalten wir also

Korollar 6.1.17. *Seien* $\varphi : U_N \to U_N$ *analytisch und* $-1 < \alpha, \beta < \infty$. $C_\varphi : \mathcal{A}^p_\alpha \to \mathcal{A}^q_\beta$ *ist genau dann ordnungsbeschränkt, wenn* $(1-|\varphi|^2)^{-1} \in L^{(\alpha+N+1)p/q}(\sigma_\beta)$.

6.2. Summierende Operatoren

In [Dom98] werden Summierbarkeitseigenschaften von Kompositionsoperatoren für den Fall $N=1$ untersucht. Diese Resultate verallgemeinern wir für beliebige Dimensionen $N \geq 1$. Sie gelten sogar für Carleson-Einbettungen.

Wir beginnen mit einer einfachen Konsequenz aus der Existenz atomarer Zerlegungen. Wiederum bezeichen wir mit $\mathcal{A}^1_{-1}$ den Hardy-Raum H^1.

Satz 6.2.1. *Seien* α, $\beta > -1$ *und* $1 \leq p, q < \infty$ *beziehungsweise* $\alpha = -1$ *und* $p = 1$. *Gilt*

$$\frac{\beta+N+1}{q} > \begin{cases} \frac{\alpha+1}{p} + N & \text{falls } q \geq 2, \\ \frac{\alpha+1}{p} + \frac{N}{2} + \frac{N}{q} & \text{falls } q < 2, \end{cases}$$

dann existieren γ, $\delta > -1$, *so dass* $I : \mathcal{A}^p_\alpha \to \mathcal{A}^q_\beta$ *wohldefiniert ist und gemäss*

$$I : \mathcal{A}^p_\alpha \hookrightarrow \mathcal{A}^1_\gamma \hookrightarrow \mathcal{A}^2_\delta \hookrightarrow \mathcal{A}^q_\beta$$

faktorisiert. Im Falle $p=1$, $q \geq 2$ *und* $\alpha > -1$ *ist dies auch noch richtig, wenn* $(\beta + N+1)/q = \alpha + N + 1$.

Insbesondere ist in diesen Fällen $I : \mathcal{A}^p_\alpha \to \mathcal{A}^q_\beta$ 1*-summierend.*

Beweis. Nach Voraussetzung können wir γ, $\delta > -1$ mit $\gamma + N + 1 = (\delta + N + 1)/2$ so wählen, dass

$$\begin{array}{ll} (\alpha+1)/p + N < (\delta+N+1)/2 = (\beta+N+1)/q & \text{falls } p>1,\ q \geq 2, \\ (\alpha+1)/p + N < (\delta+N+1)/2 < (\beta+1)/q + N/2 & \text{falls } p>1,\ q<2, \\ \alpha+N+1 \leq (\delta+N+1)/2 = (\beta+N+1)/q & \text{falls } p=1,\ q\geq 2,\ \alpha>-1, \\ \alpha+N+1 < (\delta+N+1)/2 = (\beta+N+1)/q & \text{falls } p=1,\ q \geq 2,\ \alpha=-1, \\ \alpha+N+1 < (\delta+N+1)/2 < (\beta+1)/q + N/2 & \text{falls } p=1,\ q<2. \end{array}$$

4.3.6 garantiert für $\alpha > -1$ die Existenz der behaupteten Faktorisierung, für $\alpha = -1$ verwenden wir 4.6.6. Der Zusatz ergibt sich mit atomarer Zerlegung 3.5 aus dem Satz von Grothendieck 1.1.3. ∎

Mit Hilfe der Operatoren

$$T^{(p)}_{v,s} : l^p \to \mathcal{A}^p_v : (a_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot \mid z_n))^s}$$

aus 3.5.1 können wir spezielle schwache l^{p^*}-Folgen in $\mathcal{A}^p_v$ finden, falls v die Bedingung $D(s)$ für ein $s > N$ erfüllt. Mit der Standardbasis $(e_n)_n$ in l^p ist nämlich auch $(T^{(p)}_{v,s}(e_n))_n$ eine schwache l^{p*}-Folge. Wir haben also

Lemma 6.2.2. *Sei $1<p<\infty$. Falls v die Bedingung $D(s)$ für ein $s>N$ erfüllt, so ist für jeden r-Verband $(z_n)_n$*

$$\left(\frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot\mid z_n))^s}\right)_n$$

eine schwache l^{p^*}-Folge in $\mathcal{A}_v^p$.

Aus 1.2.1 wissen wir, dass ordnungsbeschränkte Operatoren mit Bild in einem Raum $L^q(\mu)$ q-integral und damit auch (q,p^*)-summierend für jedes $1\le p^*\le q$ sind. Für allgemeine Banach-Raum-Operatoren gelten die Umkehrungen im Allgemeinen nicht. Für unsere Carleson-Einbettungen I haben wir jedoch:

Satz 6.2.3. *Sei v eine Gewichtsfunktion, die $D(s)$ erfüllt, $1<p^*\le q<\infty$. Dann sind äquivalent:*

(i) $I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$ *ist ordnungsbeschränkt.*
(ii) $I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$ *ist q-integral.*
(iii) $I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$ *ist q-summierend.*
(iv) $I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$ *ist (q,p^*)-summierend.*

Beweis. Nur für (iv)⇒(i) ist ein Argument erforderlich. Wegen 6.2.2 gilt für jede separierte Folge $(z_n)_n$ in U_N

$$\begin{aligned}\infty>\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{(1-\|z_n\|^2)^s}{v(z_n)^{1/p}(1-(\cdot|z_n))^s}\right\|_{q,\mu}^q&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{U_N}\left|\frac{(1-\|z_n\|^2)^{sq}}{v(z_n)^{q/p}(1-(w|z_n))^{sq}}\right|d\mu(w)\\ &\ge\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_r(z_n)}\left|\frac{(1-\|z_n\|^2)^{sq}}{v(z_n)^{q/p}(1-(w|z_n))^{sq}}\right|d\mu(w)\\ &\ge c^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_r(z_n)}\left|\frac{(1-\|z_n\|^2)^{sq}}{v(w)^{q/p}(1-\|z_n\|)^{sq}}\right|d\mu(w)\\ &=c^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_r(z_n)}\frac{1}{v(w)^{q/p}}d\mu(w)\ge c^{-1}\int_{U_N}\frac{1}{v(w)^{q/p}}d\mu(w).\end{aligned}$$

Dabei haben wir 2.4.2 und 3.3.4 verwendet. Somit gehört $v^{-1/p}$ zu $L^q(\mu)$, und wir sind wegen 6.1.1 fertig. ■

q-summierende Operatoren sind fast-summierend. Wieder ist die Umkehrung im Allgemeinen falsch. Für Carleson-Einbettungen haben wir indessen

Satz 6.2.4. *Seien $1\le q<\infty$, $2\le p<\infty$, $s,s'>N$, v ein D-Gewicht, für welches auch $v^{2/p}$ der Bedingung D genügt. Für ein (v,p,q)-Carleson-Mass μ sind äquivalent:*

(i) $I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$ *ist ordnungsbeschränkt.*
(ii) $I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$ *ist ist q-integral.*
(iii) $I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$ *ist q-summierend.*
(iv) $I:\mathcal{A}_v^p\to L^q(\mu)$ *ist fast-summierend.*

Beweis. Es ist nur (iv)$\Rightarrow$(i) zu zeigen. Wegen 4.3.5 ist $\widetilde{I}:\mathcal{A}^2_{v^{2/p}}\to\mathcal{A}^p_v$ beschränkt. Mit I ist $I\widetilde{I}$ und folglich auch $(I\widetilde{I})^{**}$ fast-summierend. Da wegen 1.1.7 damit $(I\widetilde{I})^{*}$ 1-summierend ist, folgt aus 1.2.1 die Behauptung. ∎

6.2.4 erlaubt uns, mindestens für die Standardgewichte v_α und $q\geq 1$, den Aussagen in 6.1.1 eine weitere hinzuzufügen, nämlich

Satz 6.2.5. *Seien μ ein Mass auf U_N, $0<p<\infty$, $1\leq q<\infty$ und $-1<\alpha<\infty$. Genau dann existiert $I:\mathcal{A}^p_\alpha\to L^q(\mu)$ als ordnungsbeschränkter Operator, wenn $X_{(\alpha+N+1)/p}$ stetig in $L^q(\mu)$ einbettet.*

Beweis. $I\in\mathcal{L}(X_{(\alpha+N+1)/p},L^q(\mu))$ folgt aus 6.1.1(v). Sei nun $I:X_{(\alpha+N+1)/p}\to L^q(\mu)$ beschränkt. Weil $X_{(\alpha+N+1)/p}$ zu l^∞ isomorph ist (vgl. 3.5.4), ist die formale Identität $X_{(\alpha+N+1)/p}\hookrightarrow L^q(\mu)$ r-summierend für ein $r\geq 2$ (vgl. 1.1.4) und damit fast-summierend. Für jedes $p<p'<\infty$ existiert eine Faktorisierung

$$\mathcal{A}^p_\alpha\hookrightarrow\mathcal{A}^{p'}_{\alpha'}\hookrightarrow X_{(\alpha+N+1)/p}\to L^q(\mu)\qquad \alpha'=p'(\alpha+N+1)/p-N-1.$$

Nach 6.2.4 sind $I:\mathcal{A}^{p'}_{\alpha'}\to L^q(\mu)$ und damit auch $I:\mathcal{A}^p_\alpha\to L^q(\mu)$ ordnungsbeschränkt. ∎

Literaturverzeichnis

[Att82] D. Attelé. Analytic multipliers of Bergman spaces. *Michigan Math. J.*, 31:307–319, 1982.

[Axl88] S. Axler. Bergman Spaces and their Operators. *Pittman Research Notes in Mathematics*, 171:1–50, 1988.

[Bek82] D. Bekollé. Inégalités à poids pour le projecteur de Bergman dans la boule de unité $\mathbb{C}^n$. *Studia Math.*, 71:305–323, 1982.

[BJar] O. Blasco and H. Jarchow. A note on Carleson measures for Hardy spaces. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, To appear.

[Car58] L. Carleson. An interpolation problem for bounded analytic functions. *Amer. J. Math.*, 80:921–930, 1958.

[Car62] L. Carleson. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. of Math.*, 76:547–559, 1962.

[CM95] C.C. Cowen and B.D. MacCluer. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*. CRC Press, 1995.

[CO97] C. Cascante and J.M. Ortega. On q-Carleson measures for spaces of M-harmonic functions. *Canad. J. Math.*, 49:635–674, 1997.

[CR80] R. Coifman and R. Rochberg. Representation theorems for holomorphic and harmonic functions. *Astérisque*, 77:11–65, 1980.

[CW82] J. A. Cima and W.R. Wogen. A Carleson measure theorem for the Bergman spaces of the unit disc. *J. Op. Theory*, 7:157–165, 1982.

[Die84] J. Diestel. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer Verlag, 1984.

[DJR99] T. Domenig, H. Jarchow, and R. Riedl. The domain space of an analytic composition operator. *J. Austral. Math. Soc.*, 66:56–65, 1999.

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge University Press, 1995.

[Dom97] T. Domenig. *Composition Operators on Weighted Bergman Spaces and Hardy Spaces*. Thesis, Universität Zürich, 1997.

[Dom98] T. Domenig. Order bounded and p-summing composition operators. *Contemp. Math.*, 213:27–41, 1998.

[DS04] P.L. Duren and A.. Schuster. *Bergman Spaces*. AMS, 2004.

[Dur70] P.L. Duren. *Theory of H^p spaces*. Academic Press, 1970.

[FR74] F. Forelli and W. Rudin. Projections on spaces of holomorphic functions in balls. *Indiana Univ. Math. J.*, 24:593–602, 1974.

[Gar81] J.B. Garnett. *Bounded analytic functions*. Academic Press, New York, 1981.

[Gro56] A. Grothendieck. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, 8:1–79, 1953/1956.

[Has75] W.W Hastings. A Carleson measure theorem for Bergman spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 52:237–333, 1975.

[HKZ00] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu. *Theory of Bergman spaces*. Springer, 2000.

[Hor74] C. Horowitz. Zeros of functions in the Bergman space. *Duke Math. J.*, 41:693–718, 1974.

[Jar81] H. Jarchow. *Locally Convex Spaces*. B.G. Teubner Stuttgart, 1981.

[JK03] H. Jarchow and U. Kollbrunner. Carleson Embeddings for Weighted Bergman Spaces. *Contemp. Math.*, 328:217–230, 2003.

[Kab63] V. Kabaĭla. Interpolation sequences for the H_p classes in the case $p < 1$. *Litovsk. Mat. Sb.*, 3:141–147, 1963.

[KC91] D.Y. Kwak and U.J. Choi. A generalization of multiplier theorem to the ball. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87:656–660, 1991.

[KPR84] N.J. Kalton, N.T. Peck, and J.W. Roberts. *An F-space sampler*. Cambridge University Press, 1984.

[Kra82] St. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variables*. John Wiley & Sons, 1982.

[KT82] N.J. Kalton and D.A. Trautman. Remarks on subspaces of H_p when $0 < p < 1$. *Michigan Math. J.*, 29:163–170, 1982.

[Kwa70] S. Kwapien. On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators. *Studia Math.*, 38:193–201, 1970.

[LP71] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński. Contributions to the theory of the classical Banach spaces. *J. Functional Analysis*, 8:225–249, 1971.

[LT73] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces I.* Springer, 1973.

[Lue83] D. H. Luecking. A technique for characterizing Carleson measures on Bergman spaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 34:319–336, 1983.

[Lue85a] D. H. Luecking. Representation and duality in weighted spaces of analytic functions. *Indiana Univ. Math. J.*, 34:319–336, 1985.

[Lue85b] D.H. Luecking. Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives. *Amer. J. Math.*, 107:85–111, 1985.

[Lue86] D.H. Luecking. Multipliers of Bergman spaces into Lebesgue-spaces. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 29:125–131, 1986.

[Lue93] D. H. Luecking. Embedding theorems for spaces of analytic functions via Khinchine's inequality. *Michigan Math. J.*, 40:333–358, 1993.

[Mac85] B. D. MacCluer. Compact composition operators on $H^p(B_n)$. *Michigan Math. J.*, 32:237–248, 1985.

[MM95] B. D. MacCluer and P.R. Mercer. Composition operators between Hardy and weighted Bergman spaces on convex domains in $\mathbb{C}^N$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123:2093–2102, 1995.

[MN91] P. Meyer-Nieberg. *Banach Lattices.* Springer, 1991.

[MS86] B. D. MacCluer and J.H. Shapiro. Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces. *Can. J. Math.*, 38:878–906, 1986.

[Nar71] R. Narasimhan. *Several Complex Variables.* The University of Chicago Press, 1971.

[Oja] E. Oja. Pitt theorem for non-locally convex spaces. Preprint.

[OP74] V.L. Oleinik and B.S. Pavlov. Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions. *J. Soviet Math.*, 2:135–142, 1974.

[Peł60] A. Pełczyński. Projections on certain Banach spaces. *Studia Math.*, 19:209–228, 1960.

[Pie67] A. Pietsch. Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen. *Studia Math.*, 28:333–353, 1967.

[Pie80] A. Pietsch. *Operator Ideals.* North-Holland, 1980.

[Pit36] H.R. Pitt. A note on bilinear forms. *J. London Math. Soc.*, 11:171–174, 1936.

[Pom92] Ch. Pommerenke. *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* Springer Verlag, 1992.

[Pow85] S.C. Power. Hörmander's Carleson theorem for the ball. *Glasg. Math. J.*, 26:13–17, 1985.

[Rol72] S. Rolewicz. *Metric Linear Spaces.* PWN-Polish Scientific Publisher, 1972.

[Ros69] H.P. Rosenthal. On quasi-complemented subspaces of Banach spaces with an appendix on compactness of operators from $L^p(\mu)$ to $L^r(\nu)$. *J. Funct. Anal.*, 4:176–214, 1969.

[Rud80] W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer Verlag, 1980.

[Rud87] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 3^{rd} ed. edition, 1987.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 2^{nd} ed. edition, 1991.

[Sar78] D. Sarason. *Function Theory on the Unit Circle.* Virginia Polytechnic Institute and State University, Department of Mathematics, 1978.

[Sch84] H.U. Schwarz. *Banach Lattices and Operators.* Teubner Texte 71, 1984.

[Sha76] J.H. Shapiro. Mackey topologies, reproducing kernels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces. *Duke Math. J.*, 43:187–202, 1976.

[SS61] H.S. Shapiro and A.L. Shields. On some interpolation problems for analytic functions. *Amer. J. Math.*, 83:513–532, 1961.

[SS03] J.H. Shapiro and W. Smith. Hardy spaces that support no compact composition operators. *J. Funct. Anal.*, 205:62–89, 2003.

[Sti72] W.J. Stiles. Some properties of l_p, $0<p<1$. *Studia Math.*, 42:109–119, 1972.

[Vid88] I. V. Videnskii. On an analog of Carleson measures. *Soviet Math. Docl*, 37:186–190, 1988.

[Vuk99] D. Vukotić. Pointwise multiplication operators between Bergman spaces on simply connected domains. *Indiana Univ. Math. J.*, 48:793–803, 1999.

[Vuk03] D. Vukotić. The isoperimetric inequality and a theorem of Hardy and Littlewood. *Amer. Math. Monthly*, 110:532–536, 2003.

[Zha04] R. Zhao. Pointwise multipliers from weighted Bergman spaces and Hardy spaces to weighted Bergman spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 29:139–150, 2004.

[Zhu90] K. Zhu. *Operator Theory in Function Spaces*. Marcel Dekker, 1990.

[Zhu05] K. Zhu. *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*. Springer, 2005.

Curriculum vitae

Name:	KOLLBRUNNER Urs
Geburtsdatum:	13. Juni 1973
Heimatort:	Dättlikon ZH

AUSBILDUNG	
1980-1986	Primarschule in Dättlikon
1986-1989	Sekundarschule in Pfungen
1989-1994	Kantonsschule Büelrain Winterthur
Januar 1994	Matura Typus E
1994-2000	Studium an der Universität Zürich Hauptfach: Mathematik grosses Nebenfach: Informatik kleines Nebenfach: Theoretische Physik
Oktober 1996	erstes Vordiplom in Mathematik
Oktober 1997-März 1998	zweites Vordiplom in Mathematik
Oktober 2000	Diplom in Mathematik Titel der Diplomarbeit: „Absolutsummierende Operatoren zwischen translationsinvarianten Räumen"(ausgearbeitet unter der Leitung von Prof. Dr. H. Jarchow)
2000-2006	Assistent/Doktorand am Institut für Mathematik, Universität Zürich

Die vorliegende Dissertation „Carleson-Masse für gewichtete Räume von analytischen Funktionen" entstand unter der Leitung von Prof. Dr. H. Jarchow und wurde von November 2000 bis Oktober 2001 teilweise durch den Schweizerischen Nationalfond unterstützt.